Concursul interjudeţean de matematică "ŞTEFAN VELOVAN" -ediţia a XIV-a

<Subiecte - clasa a III-a>

Partea I

1. Se dau numerele $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ şi fie a numărul din acest şir care are proprietarea că suma numerelor din faţa lui este egală cu suma numerelor de după el. Se dau numerele $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ şi fie b numărul din acest şir care are proprietarea că produsul numerelor din faţa lui este egal cu produsul numerelor de după el. Calculaţi $a + b$.

a) 10	**b)** 11	**c)** 12	**d)** 13	**e)** 15	**f)** 18

2. Reconstituiţi adunarea şi aflaţi cifra x:

$$\begin{array}{ccccccc}
F & A & U & R & A & R & I & + \\
 & A & U & R & A & R & I & \\
 & & U & R & A & R & I & \\
 & & & R & A & R & I & \\
 & & & & A & R & I & \\
 & & & & & R & I & \\
 & & & & & & I & \\
\hline
4 & 3 & 8 & x & 4 & 8 & 3 &
\end{array}$$

a) 0	**b)** 1	**c)** 3	**d)** 5	**e)** 6	**f)** 9

3. Pentru o serbare s-au confecţionat crenguţe cu flori de măr. Câte floricele au pregătit în total cele 3 fetiţe dansatoare, dacă fiecare dintre ele trebuia să ţină în mână câte două rămurele, fiecare ramură având câte 3 crenguţe şi pe fiecare crenguţă fiind prinse câte 4 flori.

a) 36	**b)** 48	**c)** 60	**d)** 64	**e)** 72	**f)** 76

4. Din 52 metri de stofă s-au confecţionat 8 rochii şi 10 fuste. Cât material este necesar pentru a confecţiona 3 rochii şi 5 fuste, dacă pentru o rochie şi respectiv o fustă s-au folosit un număr întreg de metri de material?

a) 16	**b)** 18	**c)** 20	**d)** 22	**e)** 24	**f)** 25

5. Câte numere de două cifre au suma cifrelor 9?

a) 6	**b)** 7	**c)** 8	**d)** 9	**e)** 10	**f)** 11

6. Într-o pungă sunt bile roşii, galbene şi albastre. Câte bile sunt în pungă, ştiind că 22 nu sunt roşii, 24 nu sunt galbene şi 26 nu sunt albastre?

a) 30	**b)** 36	**c)** 48	**d)** 50	**e)** 62	**f)** 72

Partea a II-a

1. Suma a 4 numere este 45. Găsiţi numerele, ştiind că: dacă la primul număr adunăm 2, din cel de-al doilea scădem 2, pe al treilea îl înmulţim cu 2, iar pe al patrulea îl împărţim la 2, vom obţine rezultate egale.

2. Scrieţi numărul 100 folosind nouă cifre de 1 şi operaţiile obişnuite, apoi folosind nouă cifre de 2 şi operaţiile obişnuite, apoi folosind nouă cifre de 3 şi operaţiile obişnuite, ... şi tot aşa, folosind nouă cifre de 9 şi operaţiile obişnuite.

[0] **Notă:**

- Pentru Partea I se va scrie pe foaia de concurs numai varianta corectă, fără demonstraţie. Fiecare răspuns corect va primi câte 10 puncte.
- Pentru Partea a II-a se cere demonstraţia completă, pentru care se vor acorda maxim 30 puncte.
- Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timp de lucru 2 ore.

Concursul interjudeţean de matematică "ŞTEFAN VELOVAN" -ediţia a XIV-a

<Barem de evaluare şi notare - clasa a III-a>

Oficiu ______________________________ Total 10p

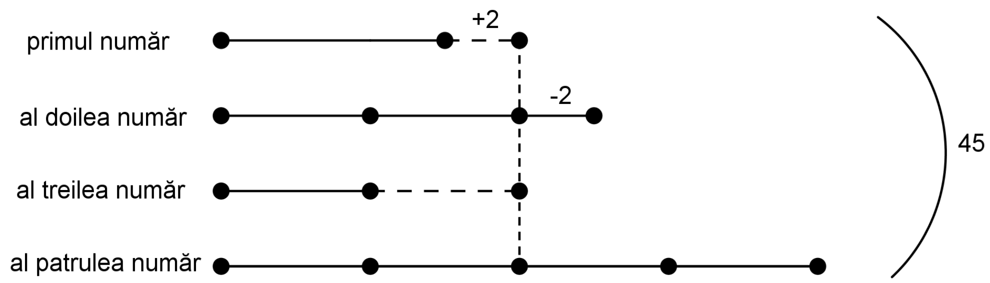
Partea I

1. d)	2. b)	3. e)	4. d)	5. d)	6. b)

______________________________ Total 60p

Partea a II-a

1.



$\surd$ $45 : 9 = 5$ (al treilea număr). 9p
$\surd$ $2 \times 5 - 2 = 8$ (primul număr). 2p
$\surd$ $2 \times 5 + 2 = 12$ (al doilea număr). 2p
$\surd$ $4 \times 5 = 20$ (al patrulea număr). 2p

______________________________ Total 15p

2. Exemplu:

$\surd$ $111 - 11 + 1 - 1 + 1 - 1 = 100$. 7p
$\surd$ $222 : 2 - 22 : 2 + 2 - 2 = 100$. 1p
$\surd$ $333 : 3 - 33 : 3 + 3 - 3 = 100$. 1p
$\surd$ $444 : 4 - 44 : 4 + 4 - 4 = 100$. 1p
$\surd$ $555 : 5 - 55 : 5 + 5 - 5 = 100$. 1p
$\surd$ $666 : 6 - 66 : 6 + 6 - 6 = 100$. 1p
$\surd$ $777 : 7 - 77 : 7 + 7 - 7 = 100$. 1p
$\surd$ $888 : 8 - 88 : 8 + 8 - 8 = 100$. 1p
$\surd$ $999 : 9 - 99 : 9 + 9 - 9 = 100$. 1p

______________________________ Total 15p

Concursul interjudeţean de matematică "ŞTEFAN VELOVAN" -ediţia a XIV-a

<Subiecte - clasa a IV-a>

Partea I

1. Câte numere de cel mult trei cifre se pot forma cu cifrele 7 şi 9?

a) 8	**b)** 12	**c)** 16	**d)** 14	**e)** 10	**f)** 18

2. Dacă $a \times b = 98$, $b \times c = 175$ şi $c - a = 11$, atunci c este:

a) 15	**b)** 25	**c)** 35	**d)** 5	**e)** 7	**f)** 45

3. În adunarea

$$\begin{array}{cccc}
C & R & A & P \; + \\
 & C & R & A \\
 & & C & R \\
 & & & C \\
\hline
2 & 0 & 1 & 8
\end{array}$$

literele reprezintă cifre. Atunci litera P reprezintă cifra:

a) 0	**b)** 2	**c)** 4	**d)** 6	**e)** 7	**f)** 8

4. La un concurs se dau 12 probleme. Pentru fiecare problemă rezolvată corect se primesc 20 puncte, iar pentru fiecare problemă rezolvată greşit sau nerezolvată se scad 10 puncte. Câte probleme a rezolvat corect un elev care a avut 30 puncte la final?

a) 5	**b)** 4	**c)** 3	**d)** 6	**e)** 7	**f)** 8

5. Mama a lăsat celor 4 băieţi un număr de prăjituri. Pe măsură ce se trezeşte, fiecare copil mănâncă jumătate din numărul prăjiturilor găsite plus încă una. Alex, fiind cel mai somnoros, s-a trezit ultimul şi mai găseşte o prăjitură. Câte prăjituri a pregătit mama?

a) 14	**b)** 22	**c)** 18	**d)** 10	**e)** 26	**f)** 30

6. Suma numerelor de trei cifre care au suma cifrelor 4 este:

a) 2010	**b)** 1610	**c)** 1700	**d)** 2018	**e)** 2100	**f)** 2110

Partea a II-a

1. Aflaţi cifra de pe locul 2018 a numărului 12345678910111213...20172018 obţinut prin alipirea cifrelor numerelor de la 1 la 2018.

2. Bogdan aşază un număr de pixuri în mod egal mai întâi în patru cutii, apoi în cinci cutii. Prima oară rămân 2 pixuri în afara cutiilor, iar a doua oară rămân 3 pixuri. Numărul pixurilor din fiecare cutie, în primul caz este cu 5 mai mare decât numărul pixurilor din fiecare cutie, în al doilea caz. Câte pixuri are Bogdan?

(Gazeta Matematică, nr. 11/2013)

[0]**Notă:**

- Pentru Partea I se va scrie pe foaia de concurs numai varianta corectă, fără demonstraţie. Fiecare răspuns corect va primi câte 10 puncte.
- Pentru Partea a II-a se cere demonstraţia completă, pentru care se vor acorda maxim 30 puncte.
- Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timp de lucru 2 ore.

Concursul interjudeţean de matematică "ŞTEFAN VELOVAN" -ediţia a XIV-a

<Barem de evaluare şi notare - clasa a IV-a>

Oficiu ______ Total 10p

Partea I

1. d)	**2. b)**	**3. f)**	**4. a)**	**5. b)**	**6. f)**

______ Total 60p

Partea a II-a

1.

$\surd$ 9 numere de o cifră $\rightarrow$ 9 cifre. 3p
$\surd$ 90 numere de 2 cifre $\rightarrow 90 \times 2 = 180$ cifre. 3p
$\surd$ $180 + 9 = 189$. 1p
$\surd$ $2018 - 189 = 1829$. 1p
$\surd$ $1829 : 3$ dă câtul 609 şi restul 2. .... 2p
$\surd$ 609 numere de 3 cifre sunt $100, 101, ..., 708$. 2p
$\surd$ urmează 709. .... 1p
$\surd$ Deci a 2018 cifră este 0. .... 2p

______ Total 15p

2.

$\surd$ Aşezăm mai întâi pixurile în patru cutii şi rămân 2. .... 3p
$\surd$ Din fiecare cutie scoatem 5 pixuri ca să rămână acelaşi număr de pixuri ca în al doilea caz. 3p
$\surd$ Am scos $4 \times 5 = 20$ pixuri. 3p
$\surd$ Cum în al doilea caz trebuie să rămână 3 pixuri în afară, în a cincea cutie punem 19 pixuri. 3p
$\surd$ Deci $19 \times 5 + 3 = 98$ pixuri are Bogdan. 3p

______ Total 15p

Concursul interjudeţean de matematică "ŞTEFAN VELOVAN" -ediţia a XIV-a

<Subiecte - clasa a V-a>

1. Dacă $a^3 = 2^{0^{18}} + 2^{0^{81}} + 2^{1^{08}} + 2^{1^{80}} + 2^{8^{01}}$, atunci a este egal cu

a) 0	**b)** 1	**c)** 2	**d)** 3	**e)** 4	**f)** 5

2. Câte numere naturale n verifică inegalităţile $1 + 3 + 5 + ... + 2017 \leq n \leq 2 + 4 + 6 + ... + 2018$?

a) 1000	**b)** 1009	**c)** 1010	**d)** 2019	**e)** 2010	**f)** 2018

3. Dacă $3a + 5b = 22$ şi $4b + 7c = 15$, atunci $12a - 35c$ este:

a) 13	**b)** 11	**c)** 15	**d)** 14	**e)** 20	**f)** 22

4. Valoarea cifrei x din egalitatea $\overline{1,9\,(1x)} + \overline{2,8\,(2x)} + \overline{3,7\,(3x)} + ... + \overline{9,1\,(9x)} = 50$ este:

a) 0	**b)** 1	**c)** 2	**d)** 3	**e)** 4	**f)** 5

5. Restul împărţirii numărului $7 + 7^2 + 7^3 + ... + 7^{2017} + 7^{2018} + 7^{2019}$ la 57 este egal cu

a) 1	**b)** 2	**c)** 3	**d)** 4	**e)** 5	**f)** 0

6. Se consideră tabloul

Rândul 1	1				
Rândul 2	2	3	4		
Rândul 3	5	6	7	8	9
....					

Numărul 2018 se află pe rândul:

a) 41	**b)** 42	**c)** 43	**d)** 44	**e)** 45	**f)** 46

Partea a II-a

1. Determinaţi numerele naturale $\overline{ab}$ pentru care numărul $A = \overline{ab} + 2 \cdot \overline{ba} + 3a + 4b$ este pătrat perfect.

(Gazeta Matematică, nr. 3/2017)

2. Dacă x este număr natural, $x > 3$ şi numerele x şi $(x + 2)$ sunt prime, aflaţi un divizor propriu al numărului $(x + 4)$.

(Gazeta Matematică, nr. 12/1984)

---

[0] **Notă:**

- Pentru Partea I se va scrie pe foaia de concurs numai varianta corectă, fără demonstraţie. Fiecare răspuns corect va primi câte 10 puncte.
- Pentru Partea a II-a se cere demonstraţia completă, pentru care se vor acorda maxim 30 puncte.
- Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timp de lucru 2 ore.

Concursul interjudeţean de matematică "ŞTEFAN VELOVAN" -ediţia a XIV-a

<Barem de evaluare şi notare - clasa a V-a>

Oficiu ______ Total 10p

Partea I

1. c)	**2. c)**	**3. a)**	**4. f)**	**5. f)**	**6. e)**

______ Total 60p

Partea a II-a

1.

$\surd$ $A = 10a + b + 2(10b + a) + 3a + 4b = 5(3a + 5b)$. 6p

$\surd$ Rezultă că A este divizibil cu 5 şi cum A este pătrat perfect, rezultă că $3a + 5b$ e divizibil cu 5. ...... 3p

$\surd$ Obţinem $3a$ divizibil cu 5, de unde $a = 5$. 3p

$\surd$ Atunci $A = 25(3 + b)$ este pătrat perfect implică $3+b$ este pătrat perfect, de unde $b = 1$ sau $b = 6$. Numerele sunt 51 şi 56. ...... 3p

______ Total 15p

2.

$\surd$ Numerele $x + 3$, $x + 4$, $x + 5$ sunt consecutive, deci unul dintre ele este divizibil cu 3. ...... 6p

$\surd$ Dacă $x + 3$ este divizibil cu 3, rezultă că x este divizibil cu 3, fals, deoarece singurul număr prim divizibil cu 3 este 3, iar $x > 3$. 3p

$\surd$ Dacă $x + 5$ este divizibil cu 3, rezultă că $x + 2$ este divizibil cu 3, fals, deoarece $x + 2$ este un număr prim mai mare decât 5. ...... 3p

$\surd$ Deci $x + 4$ este divizibil cu 3. Rezultă că un divizor propriu al numărului $x + 4$ este 3. ...... 3p

______ Total 15p

Concursul interjudeţean de matematică "ŞTEFAN VELOVAN" -ediţia a XIV-a

<Subiecte - clasa a VI-a>

Partea I

1.Fie a, b, c trei numere raţionale pozitive astfel încât $\frac{a}{2b+3c} = \frac{2b}{a+3c} = \frac{3c}{a+2b}$. Valoarea produsului $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ este:

a) 11	**b)** 10	**c)** 9	**d)** 8	**e)** 1	**f)** 2018

2.Medianele $[BE]$ şi $[CF]$ ale triunghiului $\triangle ABC$ se taie în punctul G, iar medianele $[BP]$ şi $[CQ]$ ale triunghiului $\triangle BGC$ se taie în punctul M. Raportul $\frac{AG}{GM}$ este egal cu:

a) 2	**b)** 3	**c)** $1,5$	**d)** $2,5$	**e)** $3,5$	**f)** $2,25$

3. După o mărire de preţ cu 20%, preţul unui obiect s-a micşorat cu 20%. Astfel preţul final al produsului este $p\%$ din preţul iniţial. Valoarea lui p este:

a) 50	**b)** 60	**c)** 75	**d)** 96	**e)** 86	**f)** 90

4. În triunghiul ascuţitunghic $\triangle ABC$ cu $AB < AC < BC$, mediatoarea laturii $[AC]$ intersectează latura BC în punctul M. Se ştie că $AB = 8$cm şi $BC = 14$cm. Perimetrul triunghiului $\triangle ABM$ are valoarea egală cu:

a) 20cm	**b)** 21cm	**c)** 22cm	**d)** 23cm	**e)** 24cm	**f)** 25cm

5. Fie numerele $a_1, a_2, ..., a_n \in \{-1, 1\}$ şi suma $S = |a_1 + a_2| + |a_2 + a_3| + ... + |a_9 + a_{10}|$. Notăm cu b cea mai mică şi cu c cea mai mare valoare pe care o poate avea S. Diferenţa $c - b$ este egală cu:

a) 10	**b)** 11	**c)** 14	**d)** 15	**e)** 18	**f)** 20

6. În triunghiul $\triangle ABC$, notăm cu I punctul de intersecţie al bisectoarelor unghiurilor $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle C$. Fie $CD \perp BI$, $D \in BI$. Dacă $CD + BI = BD$, atunci $m(\sphericalangle BAC)$ este egală cu:

a) 15°	**b)** 20°	**c)** 30°	**d)** 45°	**e)** 60°	**f)** 90°

Partea a II-a

1. Fie a un număr natural divizibil cu 8 şi nedivizibil cu 16. Să se arate că produsul tuturor divizorilor săi naturali este pătrat perfect.

(Gazeta Matematică, nr. 11/2012)

2. În triunghiul $\triangle ABC$ înălţimea $[AD]$ şi mediana $[AM]$ împart unghiul $\sphericalangle BAC$ în trei unghiuri congruente. Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului $\triangle ABC$.

---

[0]**Notă:**

- Pentru Partea I se va scrie pe foaia de concurs numai varianta corectă, fără demonstraţie. Fiecare răspuns corect va primi câte 10 puncte.
- Pentru Partea a II-a se cere demonstraţia completă, pentru care se vor acorda maxim 30 puncte.
- Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timp de lucru 2 ore.

Concursul interjudeţean de matematică "ŞTEFAN VELOVAN" -ediţia a XIV-a

<Barem de evaluare şi notare - clasa a VI-a>

Oficiu ________ Total 10p

Partea I

1. a)	**2. b)**	**3. d)**	**4. c)**	**5. e)**	**6. f)**

________ Total 60p

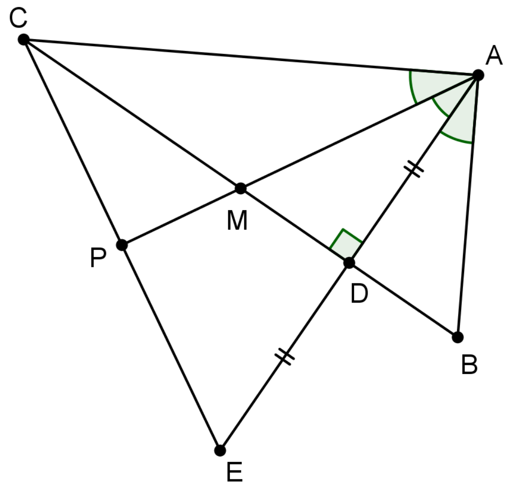
Partea a II-a

1.

$\surd$ $a = 2^3 \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_m^{k_m}$, unde $p_1, p_2, ..., p_m$ sunt numere prime impare. 2p
$\surd$ Fie $d_1, d_2, ..., d_n$ toţi divizorii lui a. 1p
$\surd$ Avem egalitatea $\{d_1, d_2, ..., d_n\} = \left\{\frac{a}{d_1}, \frac{a}{d_2}, ..., \frac{a}{d_n}\right\}$. 2p
$\surd$ $d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_n = \frac{a}{d_1} \cdot \frac{a}{d_2} \cdot ... \cdot \frac{a}{d_n} \Rightarrow d_1^2 \cdot d_2^2 \cdot ... \cdot d_n^2 = a^n \quad (1)$. 4p
$\surd$ $n = (3+1) \cdot (k_1+1) \cdot (k_2+1) \cdot ... \cdot (k_n+1) = 4k,\ k \in \mathbb{N} \quad (2)$. 2p
$\surd$ Din relaţiile (1) şi (2) rezultă $(d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_n)^2 = a^{4k}$. 2p
$\surd$ $(d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_n)^2 = \left(a^{2k}\right)^2 \Rightarrow d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_n = a^{2k} = \left(a^k\right)^2$. 2p

________ Total 15p

2.



$\surd$ Notăm cu E simetricul lui A faţă de D. 2p
$\surd$ Triunghiul $\triangle BAD \equiv \triangle MAD$ $(C.U.)$. 1p
$\surd$ $DM = BD \Rightarrow DM = \frac{BM}{2} \Rightarrow DM = \frac{MC}{2} \quad (1)$. 1p
$\surd$ $[CD]$ este mediană în triunghiul $\triangle ACE \quad (2)$. 1p
$\surd$ Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că M este centrul de greutate al triunghiului $\triangle ACE \quad (3)$. 2p
$\surd$ $[AP$ şi $[CD$ sunt bisectoare în triunghiul $\triangle ACE$ (unde$\{P\} = AM \cap CE$). 1p
$\surd$ Deci M este punctul de intersecţie al bisectoarelor triunghiului $\triangle ACE \quad (4)$. 2p
$\surd$ Din relaţiile (3) şi (4) rezultă că triunghiul $\triangle ACE$ este echilateral. 2p
$\surd$ $m(\sphericalangle ACB) = \frac{m(\sphericalangle ACE)}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$. 1p
$\surd$ $m(\sphericalangle CAD) = \frac{2}{3} \cdot m(\sphericalangle BAC) \Rightarrow 60^\circ = \frac{2}{3} \cdot m(\sphericalangle BAC) \Rightarrow m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$. 1p
$\surd$ $m(\sphericalangle ABC) = 180^\circ - [m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle ACB)] = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. 1p

________ Total 15p

Concursul interjudeţean de matematică "ŞTEFAN VELOVAN" -ediţia a XIV-a

<Subiecte - clasa a VII-a>

Partea I

1. Fie a, b, c numere reale astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 14$ şi $ab + bc + ac = 11$. Calculând $(a + b + c)^2$ se obţine:

a) 25	**b)** 36	**c)** 49	**d)** 16	**e)** 27	**f)** 30

2. Dacă $a \cdot b = 2018$ şi $b \cdot c = 2019$, atunci rezultatul calculului $\dfrac{1009\sqrt{2018} + a}{3\sqrt{2019} + c} \cdot \dfrac{b\sqrt{2019} + 673}{b\sqrt{2018} + 2}$ este:

a) $\dfrac{1009}{3}$	**b)** 2018	**c)** $\dfrac{2018}{3}$	**d)** 2019	**e)** 2017	**f)** $\dfrac{1}{3}$

3. Dacă $B = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + ... - \dfrac{1}{2018}$ şi $C = \dfrac{1}{1009} + \dfrac{1}{1010} + \dfrac{1}{1011} + ... + \dfrac{1}{2018}$, atunci:

a) $B = C$	**b)** $1009\,(B - C) = -1$	**c)** $2C = B$	**d)** $B = C - \dfrac{1}{1019}$	**e)** $C = B + 1$	**f)** $C = B - 1$

4. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2y^2 + \sqrt{24}y + 5 = 0$. Care este valoarea produsului numerelor x şi y?

a) $2\sqrt{6}$	**b)** $-\sqrt{6}$	**c)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**d)** $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$	**e)** -1	**f)** 1

5. În trapezul $ABCD$, $AB//CD$, $AB = 7$cm, $BC = 13$cm, $CD = 21$cm şi $AD = 15$cm. Aria trapezului $ABCD$ are valoarea de:

a) 150cm^2	**b)** 200cm^2	**c)** 168cm^2	**d)** 112cm^2	**e)** 252cm^2	**f)** 140cm^2

6. Latura unui romb este egală cu media geometrică a diagonalelor sale. Măsura unuia dintre unghiurile rombului este egală cu:

a) $15°$	**b)** $30°$	**c)** $45°$	**d)** $60°$	**e)** $75°$	**f)** $90°$

Partea a II-a

1. Fie n numere naturale, nenule şi distincte $a_1, a_2, ..., a_n$, astfel încât dintre oricare două unul este divizorul celuilalt. Să se arate că:

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + ... + \frac{1}{a_n^2} < \frac{4}{3}.$$

(Gazeta Matematică, nr. 1/2009)

2. În trapezul isoscel $ABCD$, $AC \perp BD$. Paralela la baze dusă prin punctul de interecţie a diagonalelor intersectează laturile neparalelele BC şi AD în punctele P, respectiv R. Fie punctul $Q \in (BC)$, astfel încât $BQ = CP$. Demonstraţi că:

a) $QR = AD$

b) $QR \perp AD$.

[0]**Notă:**

- Pentru Partea I se va scrie pe foaia de concurs numai varianta corectă, fără demonstraţie. Fiecare răspuns corect va primi câte 10 puncte.
- Pentru Partea a II-a se cere demonstraţia completă, pentru care se vor acorda maxim 30 puncte.
- Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timp de lucru 2 ore.

Concursul interjudeţean de matematică "ŞTEFAN VELOVAN" -ediţia a XIV-a

<Barem de evaluare şi notare - clasa a VII-a>

Oficiu ______________________________ Total 10p

Partea I

1. b)	**2. a)**	**3. b)**	**4. e)**	**5. c)**	**6. b)**

______________________________ Total 60p

Partea a II-a

1.

$\surd$ Renotăm numerele crescător $1 \leq b_1 < b_2 < ... < b_n$, cu $b_i \mid b_j$, oricare ar fi $i < j$. 2p

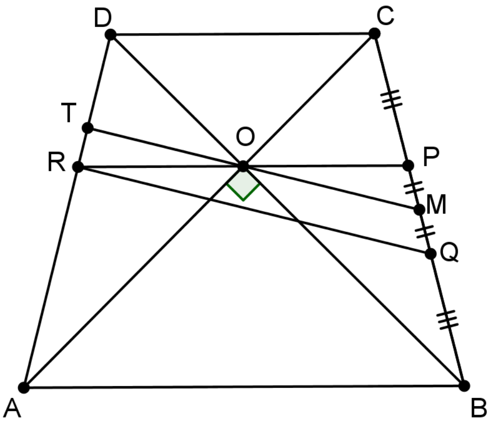
$\surd$ Rezultă $b_2 \geq 2b_1$, $b_3 \geq 2b_2 \geq 2^2 b_1$,..., $b_n \geq 2^{n-1} b_1$. 3p

$\surd$ Avem $\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+...+\frac{1}{a_n^2}=\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{b_2^2}+...+\frac{1}{b_n^2}\leq\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{2^2b_1^2}+...+\frac{1}{2^{2(n-1)}b_1^2}=\frac{1}{b_1^2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{4^{n-1}}\right)$. 5p

$\surd$ Finalizare $\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+...+\frac{1}{a_n^2}\leq\frac{1}{b_1^2}\cdot\frac{1-\frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}}\leq\frac{1-\frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}}<\frac{4}{3}$. 5p

______________________________ Total 15p

2.



a)

$\surd$ Dacă $\{O\} = AC \cap BD$ şi M =mij$[BC]$, atunci OM este linie mijlocie în $\triangle PQR$. 3p

$\surd$ Deci $OM//QR$ şi $OM = \frac{QR}{2}$. 1p

$\surd$ OM este mediană corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul $\triangle BOC \Longrightarrow OM = \frac{BC}{2}$. 3p

$\surd$ Deci $QR = BC = AD$. 1p

b)

$\surd$ Dacă $MO \cap AD = \{T\}$, atunci $\sphericalangle MBO \equiv \sphericalangle MOB \equiv \sphericalangle DOT$. 2p

$\surd$ Cum $\sphericalangle OCB \equiv \sphericalangle TDO$, avem $m\left(\sphericalangle OTD\right) = m\left(\sphericalangle BOC\right) = 90°$. 2p

$\surd$ Rezultă $MT \perp AD$. 2p

$\surd$ Finalizare: $QR \perp AD$. 1p

______________________________ Total 15p

Concursul interjudeţean de matematică "ŞTEFAN VELOVAN" -ediţia a XIV-a

<Subiecte - clasa a VIII-a>

Partea I

1. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu latura bazei $AB = 12$cm, iar înălţimea $VO = 6\sqrt{3}$cm. Care este măsura unghiului determinat de planele (VBC) şi (VAD)?

a) 60°	**b)** 30°	**c)** 45°	**d)** 90°	**e)** 180°	**f)** 120°

2. Se consideră expresia $E(x) = 2 \cdot \left(\dfrac{x^2 - x}{x^2 + 1} + \dfrac{2x^2}{x^3 - x^2 + x - 1} \right) \cdot \dfrac{x^2 - 1}{x^2} \cdot \left(\dfrac{5x^2 + 12x + 7}{2x^2 + 3x} \right)^{-1} - 1$. Care este valoarea $E\left(\dfrac{-9}{7}\right)$?

a) $\frac{1}{27}$	**b)** $\frac{3}{2}$	**c)** $\frac{1}{2}$	**d)** $\frac{1}{7}$	**e)** $\frac{13}{27}$	**f)** 8

3. Fie x, y numere naturale ce îndeplinesc relaţia $\sqrt{x} + \dfrac{5}{\sqrt{y}} \in \mathbb{N}$. Care este valoarea lui $\dfrac{y^2 - 25}{y - 1}$?

a) -24	**b)** 8	**c)** -7	**d)** 7	**e)** 10	**f)** 0

4. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = ax + b$, a, $b \in \mathbb{Z}$, care satisface simultan egalităţile $f(-10) + f(-9) + ... + f(0) + f(1) + ... + f(11) = 11$, $f(-1) \cdot f(1) = 0$. Rezultatul calculului $f(1) + f(2) + ... + f(2018)$ este:

a) 2017	**b)** 2018	**c)** $5 \cdot 2019$	**d)** $-3 \cdot 2017$	**e)** $2018 \cdot 2017$	**f)** $-2017 \cdot 1009$

5. Se consideră inecuaţia $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + ... + \dfrac{1}{5x \cdot (5x + 1)} \leq \dfrac{5}{6}$, $x \in \mathbb{N}^*$. Care este valoarea lui $x^2 + 2018$?

a) 2018	**b)** 2034	**c)** 2022	**d)** 2019	**e)** 2027	**f)** 2043

6. Un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 6$ cm, $BC = 6\sqrt{3}$ cm şi $AA' = 6$ cm. Care este valoarea sinusului unghiului format de dreptele AC'şi MN, unde M este mijlocul lui $(A'B')$, iar N este mijlocul lui $(A'D')$?

a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$	**b)** $\frac{\sqrt{5}}{3}$	**c)** $\frac{\sqrt{6}}{4}$	**d)** $\frac{\sqrt{6}}{5}$	**e)** $\frac{2}{\sqrt{5}}$	**f)** $\frac{-\sqrt{3}}{3}$

Partea a II-a

1. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile x, y, z şi diagonala d. Arătaţi că

$$\frac{d^4}{ad^4 + bx^4} + \frac{d^4}{ad^4 + by^4} + \frac{d^4}{ad^4 + bz^4} \geq \frac{6\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2a\sqrt{a}}, \text{ oricare ar fi } a > 0 \text{ şi } b \geq 0.$$

(Gazeta Matematică)

2. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, paralela dusă prin O (centrul feţei $ADD'A'$) la AC intersectează planul $(BB'C')$ în T. Să se determine sinusul unghiului format de planele (CTO) şi $(AB'D')$.

(Gazeta Matematică)

---

[0] **Notă:**

- Pentru Partea I se va scrie pe foaia de concurs numai varianta corectă, fără demonstraţie. Fiecare răspuns corect va primi câte 10 puncte.
- Pentru Partea a II-a se cere demonstraţia completă, pentru care se vor acorda maxim 30 puncte.
- Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timp de lucru 2 ore.

Concursul interjudeţean de matematică "ŞTEFAN VELOVAN" -ediţia a XIV-a

<Barem de evaluare şi notare - clasa a VIII-a>

Oficiu ______________________________ Total 10p

Partea I

1. a)	**2. c)**	**3. f)**	**4. f)**	**5. d)**	**6. e)**

______________________________ Total 60p

Partea a II-a

1.

$\surd$ Notăm $S = \frac{d^4}{ad^4+bx^4} + \frac{d^4}{ad^4+by^4} + \frac{d^4}{ad^4+bz^4}$. Atunci putem scrie. 2p

$\surd$ $aS = 1 - \frac{bx^4}{ad^4+bx^4} + 1 - \frac{by^4}{ad^4+by^4} + 1 - \frac{bz^4}{ad^4+bz^4} = 3 - b(\frac{x^4}{ad^4+bx^4} + \frac{y^4}{ad^4+by^4} + \frac{z^4}{ad^4+bz^4})$. 4p

$\surd$ Folosind inegalitatea mediilor, deducem $\frac{ad^4+bx^4}{2} \geq d^2x^2\sqrt{ab}$, prin urmare avem. 2p

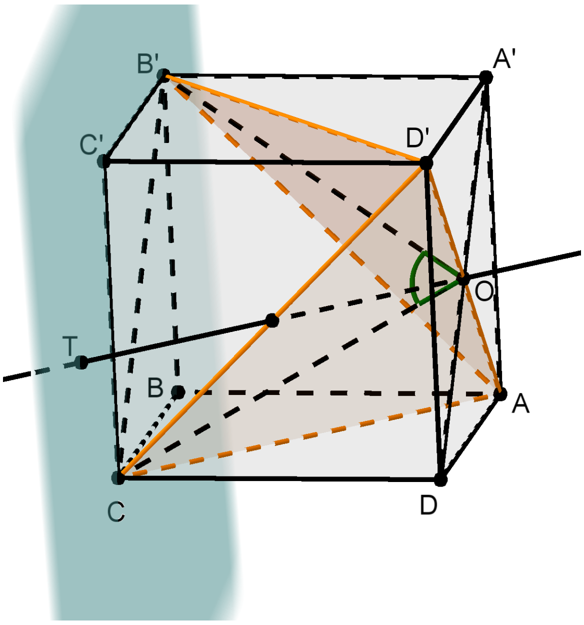
$\surd$ $\frac{x^4}{ad^4+bx^4} \leq \frac{x^2}{2d^2\sqrt{ab}}$. 2p

$\surd$ Scriind toate relaţiile, vom obţine prin însumare $\frac{x^4}{ad^4+bx^4} + \frac{y^4}{ad^4+by^4} + \frac{z^4}{ad^4+bz^4} \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}}$. 2p

$\surd$ Revenind, avem $S \geq \frac{6\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2a\sqrt{a}}$, ceea ce trebuia demonstrat. 3p

______________________________ Total 15p

2.



$\surd$ Se observă că AD' este dreapta comună a planelor (CTO) şi $(AB'D')$. 2p

$\surd$ Unghiul format de planele (CTO) şi $(AB'D')$ este $\widehat{B'OC}$ (justificare). 8p

$\surd$ Avem $S_{B'OC} = \frac{B'C \cdot OO'}{2} = \frac{OC \cdot OB' \cdot \sin\widehat{B'OC}}{2} \Rightarrow \sin\widehat{B'OC} = \frac{a\sqrt{2}\cdot a}{OC^2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{a^2+\frac{a^2}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; am notat cu a latura cubului. 5p

______________________________ Total 15p