INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova.
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, Județul Dolj, 11 februarie 2023
CLASA a V-a

Exercițiul 1. **(7p)** Fie a=2024+2·(1+2+3+.....+2023) și b= 1+3+5+......+2023. Arătați că a=4b.

(***)

Exercițiul 2 **(3p)** *a)* Determinați numărul natural nenul a astfel încât $2022^{2022^{2023}}$ să se poată scrie ca a^a .

Gazeta Matematică Nr.11/2022

(4p) *b)* Aflați numerele naturale $\overline{ab}$ pentru care $\left(\overline{ab}\right)^2 + \left(\overline{ab}\right)^3$ este pătrat perfect.

(***)

Exercițiul 3 **(7p)** Determinați toate numerele de forma $\overline{abc}$, știind că împărțite la $\overline{bc}$ dau câtul $a + 1$ și restul $a + 5$.

Gazeta Matematică Nr.2/2022

Exercițiul 4 Suma a 18 numere naturale este 591. Împărțind fiecare dintre aceste numere la numărul natural nenul n obținem resturi egale cu 3 sau 5. Suma tuturor acestor resturi este egală cu 74.

(4p) *a)* Câte resturi, dintre cele 18, sunt egale cu 3?

(3p) *b)* Să se determine cel mai mic număr natural ***n*** care satisface condițiile din enunț.

(***)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 2 ore

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN DOLJ

Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova.
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
11.02.2023
Clasa a VI-a

Exercițiul 1. Arătați că dacă a, b, c sunt cifre nenule și

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ab0}+\overline{ac}}=\frac{\overline{bc}}{\overline{bc0}+\overline{ba}}=\frac{\overline{ca}}{\overline{ca0}+\overline{cb}},$$

atunci $a=b=c$.

Exercițiul 2. Se consideră numărul $A=3+3^2+3^3+\cdots+3^{2022}$.

a) Arătați că A se divide cu 156.

b) Determinați numărul perechilor (p,n) de numere naturale pentru care $p^n=2\cdot A+3$.

G.M. 10/2022

Exercițiul 3. Fie $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOA$ unghiuri formate în jurul unui punct.

Se știe că:

$$2\cdot\sphericalangle COD=3\cdot\sphericalangle AOB,\ 10\cdot\sphericalangle BOC=9\cdot\sphericalangle DOA$$

și

$$\frac{\sphericalangle AOB}{2}=\frac{\sphericalangle BOC}{9}.$$

a) Arătați că bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOD$ formează un unghi drept.

b) Dacă OP este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$ și OQ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOD$, aflați unghiul $\sphericalangle POQ$.

Exercițiul 4. Fie mulțimea $A=\{2^a\cdot 7^b \mid a,b\in \mathrm{N}\}$.

a) Aflați cele mai mici patru elemente din A care sunt pătrate perfecte.

b) Demonstrați că printre oricare cinci elemente din mulțimea A, există cel puțin două al căror produs este pătrat perfect.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 2 ore.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ

Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI

Olimpiada Natională de Matematică
Etapa Locală, Judeţul Dolj, 11 februarie 2023
CLASA a VII-a – enunţuri

Problema 1. a) Determinaţi cardinalul mulţimii:

$$A=\left\{x\in\mathbb{Z}\left|\frac{2\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{(3x+2)\left(\sqrt{5^2-3^2}+\sqrt{12}\right)\cdot 0,5}\in\mathbb{Z}\right.\right\}$$

b) Se consideră numărul:

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}\left(\sqrt{4}+\sqrt{3}\right)}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2023\cdot 2024}\left(\sqrt{2024}+\sqrt{2023}\right)}$$

Determinaţi partea întreagă a numărului N, unde $N=x\cdot\left(1+\left(\sqrt{2024}\right)^{-1}\right)$.

Problema 2. a) Se consideră ecuaţia $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$, unde x şi y sunt numere raţionale pozitive, iar n este număr natural care nu este pătrat perfect. Dacă (x_0,y_0) este o soluţie a acestei ecuaţii, demonstraţi că niciunul dintre numerele x_0 şi y_0 nu este pătrat perfect.

b) Determinaţi numerele naturale nenule x şi y, astfel încât $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{12}}$.

Problema 3. Fie pătratul $ABCD$ şi punctele E pe diagonala BD, F pe latura CD şi G pe dreapta AB, astfel încât B este situat între A şi G, iar $BG=BE=DF=BD-BA$.

a) Demonstraţi că unghiurile EGB, CGF şi EGF sunt congruente.

b) Arătaţi că punctul E este egal depărtat de vârfurile patrulaterului $AGCF$.

Gazeta Matematică nr. 10/2022

Problema 4. Se consideră cercurile $C(O_1,R_1)$ şi $C(O_2,R_2)$ secante în punctele A şi B, punctele A şi C sunt diametral opuse în $C(O_1,R_1)$ şi punctele A şi D sunt diametral opuse în $C(O_2,R_2)$. Tangenta în A la $C(O_1,R_1)$ intersectează $C(O_2,R_2)$ în punctul M şi tangenta în A la $C(O_2,R_2)$ intersectează $C(O_1,R_1)$ în N. Punctul P se află pe dreapta AB, astfel încât punctul B este mijlocul segmentului AP

a) Arătaţi că punctele B, C şi D sunt coliniare.

b) Demonstraţi că patrulaterul $AMPN$ este inscriptibil.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
11 februarie 2023

Clasa a VIII-a

1. a) Arătați că pentru orice număr real $x > 0$ este adevărată inegalitatea:

$$2x^2 + 9 \geq 6x\sqrt{2}.$$

b) Demonstrați că dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, atunci este adevărată inegalitatea:

$$\frac{a}{2a^2+9} + \frac{b}{2b^2+9} + \frac{c}{2c^2+9} \leq \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

(***)

2. Determinați numărul natural *n* pentru care numărul $A=\sqrt{\sqrt{n+2023}+\sqrt{n}}$ este număr natural.

Lavinia Trincu

3. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ în care punctele M, N și P sunt mijloacele muchiilor BC, CC', respectiv AD, iar $\{O'\} = A'C' \cap B'D'$.

a) Arătați că $B'N \perp (C'MP)$.

b) Arătați că $(O'B'N) \perp (C'BD)$.

c) Calculați sinusul unghiului determinat de dreapta $C'N$ și planul $(O'B'N)$.

Gabriel Tica

4. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat și $M \in (AC)$.

a) Dacă M este mijlocul lui (AC), calculați $cos(\sphericalangle(BM, CD))$.

b) Arătați că, pentru orice $M \in (AC)$, raportul $\frac{cos(\sphericalangle(BM,CD))}{sin(\sphericalangle ABM)}$ are aceeași valoare.

Traian Preda, Gazeta Matematică nr. 11/2022

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
11 februarie 2023

Clasa a IX-a

1. a) Arătați că $[a]+\left[a+\frac{1}{2}\right]=[2a]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\frac{2x-1}{12}\right]+\left[\frac{2x+5}{12}\right]+\left[\frac{x+1}{3}\right]=\frac{3x+1}{2}$.

Adrian Bud

2. Fie ABCD un patrulater și punctele M, N, P, Q astfel încât $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{BN}=3\overrightarrow{NC},\ \overrightarrow{DP}=\overrightarrow{PC},\ \overrightarrow{DQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$.

a) Demonstrați că $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

b) Arătați că dreapta MP trece prin mijlocul segmentului NQ.

(***)

3. Fie $p\in N$. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției

„Există $q\in N$ astfel încât $\left(p+\sqrt{p^2+2021}\right)^2=\sqrt{q^2+q}$."

Mihaela Berindeanu, Gazeta Matematică 10/2021

4. Fie $x,y,z\in[2,\infty)$. Demonstrați că

$$\frac{x^6+y^6}{x^4+y^4}+\frac{y^6+z^6}{y^4+z^4}+\frac{z^6+x^6}{z^4+x^4}\geq 2(x+y+z).$$

Cătălin Cristea

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota cu puncte între 0 și 7
Timp de lucru: 3 ore

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro
MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
11 februarie 2023

Clasa a X-a

1. Dacă $x, y, z \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$, demonstrați că:

$$\log_{3xy}\left(2x+\frac{y}{x}\right)+\log_{3yz}\left(2y+\frac{z}{y}\right)+\log_{3zx}\left(2z+\frac{x}{z}\right)\geq 1+\frac{6}{\log_3(27(xyz)^2)}.$$

Precizați cazul de egalitate.

Prof. Cristian Moanță

2. Se consideră funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x^2+f(y))=(f(x))^2+y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
a) Să se arate că funcția f este bijectivă.
b) Să se calculeze $f(0)$.
c) Să se calculeze $f^{-1}(2023)$, unde f^{-1} reprezintă inversa funcției f.

Prof. Spiridon Cătălin

3. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ și $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=1$. Să se calculeze $|z_1^{2022}+z_2^{2022}+z_3^{2022}|$.

(Supliment Gazeta Matematică nr. 11/2022)

4. Fie z un număr complex cu $|z|\leq 1$. Arătați că $|z^2-1|\cdot|z-1|^2\leq 3\sqrt{3}$.

(Gazeta Matematică nr. 12/2021)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota cu puncte între 0 și 7
Timp de lucru: 3 ore

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
11 februarie 2023

Clasa a XI -a

1. Rezolvați în mulțimea $M_2(\mathrm{R})$ ecuația: $X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}$.

Benedict G. Niculescu

2. Fie A, B$\in M_2(\mathrm{R})$ astfel încât AB=BA, $\det(A^4+A^2B^2+B^4)=9$ și $\det(A^2+B^2)+\det(AB)=5$.
Să se calculeze $\sqrt{\det(\mathrm{A}^2+\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2)}+\sqrt{\det(\mathrm{A}^2-\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2)}$.

***

3. Considerăm șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termeni strict pozitivi, dat de relația $a_{n+1} = \ln(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$, $n \geq 1$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)\cdot e^{a_n}$.

Nicolae Mușuroia, Baia Mare
Gazeta Matematică nr. 10/2022

4. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_1 > 0$ (a_1 *fixat*) și pentru n$\geq 1 (n \in N)$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$.

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{\sqrt{k}}\right]}{na_n}$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului a.

***

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota cu puncte între 0 și 7.
Timp de lucru: 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ

Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ
11 FEBRUARIE 2023

CLASA A XII-A

Subiecte

1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $c > 0$ şi $a, b \in (0, \frac{\pi}{2})$ astfel încât $a + b = \frac{\pi}{2}$. Calculaţi

$$\int_a^b \frac{c + a\sin^n x + b\cos^n x}{4c + \pi(\sin^n x + \cos^n x)}\, dx.$$

Mihály Bencze, Braşov, G.M. nr. 11/2022

2. Fie $f : [0, \pi]$ o funcţie care admite primitive şi care verifică relaţia

$$f(x)\sin x - f(\pi - x) = \cos^2 x \text{ pentru orice } x \in [0, \pi].$$

Să se determine primitivele lui f.

C.d.p.

3. Fie $(G, \cdot)$ un grup în care are loc implicaţia

$$xy^2 = z^2x \Longrightarrow y = z, \text{ pentru orice } x, y, z \in G. \qquad (*)$$

Să se demonstreze că:

(a) $x^2 \neq e$ pentru orice $x \in G \setminus \{e\}$, unde e este elementul neutru al lui G.
(b) G este abelian.
(c) Orice grup cu proprietăţile (a) şi (b) satisface relaţia (*).

C.d.p.

4. Pe mulţimea $\{a, b, c, d, e\}$ operaţia "$\star$" defineşte o structură de grup. Ştiind că $a \star b = d$, $c \star a = e$ şi $d \star c = b$, să se alcătuiască tabla grupului.

C.d.p.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota cu puncte între 0 şi 7.
Timp de lucru: 3 ore.