INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova.
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Barem de notare și evaluare

Olimpiada Natională de Matematică

Etapa Locală, Județul Dolj, 11 februarie 2023

clasa a V-a

Exercițiul 1	
1. a=2024+2·(1+2+3+…..+2023)=2024+2· 2023 · 2024: 2=2024+2023· 2024 = 2024^2.	2p
b= 1+3+5+...+2023=1+2+3+4+5+......+2023 - $(2+4+6+\dots+2022)$=	1p
2023 · 2024: 2 - 2(1+2+3+ … +1011) = 2023· 1012 - 1011· 1012 =	2p
1012(2023− 1011) = 1012^2.	1p
a=2024^2 =$(2 \cdot 1012)^2$ =$2^2 \cdot 1012^2$ =4b.	1p
TOTAL	**7p**
Exercițiul 2	
a) Avem : $2022^{2022^{2023}} = 2022^{2022^{2022+1}} = 2022^{2022^{2022}\cdot 2022}$	1p
$2022^{2022^{2022}\cdot 2022} = \left(2022^{2022^{2022}}\right)^{2022}$	1p
$= (2022^{2022})^{2022^{2022}}$ Deci a=2022^{2022}	1p
b) Notăm $\overline{ab}$ =x, unde x≥ 10, x≤ 99.	1p
Rezultă $x^2 + x^3 = k^2 \Leftrightarrow x^2(1 + x) = k^2$.	1p
Este necesar ca 1+x să fie pătrat perfect ⇒x+1∈ {16,25,36,49,64,81,100}.	1p
Deci x= $\overline{ab}$ ∈ {15,24,35,48,63,80,99}.	1p
TOTAL	**7p**
Exercițiul 3	
Relația din enunț devine: $\overline{abc} = \overline{bc}(a+1) + a + 5$ *și* $a + 5 < \overline{bc}$.	2p
Obținem : $100a + \overline{bc} = a \cdot \overline{bc} + \overline{bc} + a + 5$ rezultă $99a - a \cdot \overline{bc} = 5$.	2p
Avem că: $a(99 - \overline{bc}) = 5$ de unde rezultă că $a = 1$ *sau* $a = 5$.	2p
Pentru $a = 1$ *se obține* $\overline{abc} = 194$. Pentru $a = 5$ *se obține* $\overline{abc} = 598$.	1p
TOTAL	**7p**
Exercitiul 4	
a) Presupunem că toate resturile sunt 3, atunci suma lor este 54.	1p
Diferența 74 -54 = 20 este determinată de diferența resturilor 5-3=2.	1p
Rezultă că sunt 20:2=10 resturi egale cu 5.	1p
Deci avem 8 resturi egale cu 3.	
b) Fie $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{18}$ cele 18 numere naturale, $c_1, c_2, c_3, c_4, \dots, c_{18}$ câturile și $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots, r_{18}$ resturile obținute prin împărțirea la n. Atunci: $a_1 = n \cdot c_1 + r_1$, $a_2 = n \cdot c_2 + r_2$, ..., $a_{18} = n \cdot c_{18} + r_{18}$	1p
Resturile sunt 3 sau 5 ⇒ $n > 5$.	1p
$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{18} = n \cdot (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \dots + c_{18}) + 74 = 591$ Așadar, $n \cdot (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \dots + c_{18}) = 517 = 11 \cdot 47$	1p
cel mai mic număr natural n care satisface condițiile din enunț este 11.	1p
TOTAL	**7p**

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală, Judeţul Dolj, 11 februarie 2023

CLASA a VI-a – soluţii

Problema 1. Arătaţi că dacă a, b şi c sunt cifre nenule şi

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ab0}+\overline{ac}}=\frac{\overline{bc}}{\overline{bc0}+\overline{ba}}=\frac{\overline{ca}}{\overline{ca0}+\overline{cb}},$$

atunci $a=b=c$.

Soluţie. Avem $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{ab0}+\overline{ac}}=\dfrac{\overline{bc}}{\overline{bc0}+\overline{ba}}=\dfrac{\overline{ca}}{\overline{ca0}+\overline{cb}}=\dfrac{\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}}{\overline{ab0}+\overline{ac}+\overline{bc0}+\overline{ba}+\overline{ca0}+\overline{cb}}$. **2p**

Dar: $\dfrac{\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}}{\overline{ab0}+\overline{ac}+\overline{bc0}+\overline{ba}+\overline{ca0}+\overline{cb}}=\dfrac{11(a+b+c)}{121(a+b+c)}=\dfrac{1}{11}$..................... **2p**

Din $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{ab0}+\overline{ac}}=\dfrac{1}{11}$ avem $\overline{ab0}+\overline{ac}=11\overline{ab}$, adică $\overline{ac}=\overline{ab}$, de unde deducem $c=b$. **1p**

Din $\dfrac{\overline{bc}}{\overline{bc0}+\overline{ba}}=\dfrac{1}{11}$ avem $\overline{bc0}+\overline{ba}=11\overline{bc}$, adică $\overline{ba}=\overline{bc}$, de unde deducem $a=c$.. **1p**

Aşadar $a=b=c$.. **1p**

Problema 2. Se consideră numărul $A=3+3^2+3^3+\cdots+3^{2022}$.
a) Arătaţi că A se divide cu 156.
b) Determinaţi numărul perechilor (p,n) de numere naturale pentru care $p^n=2\cdot A+3$.

Soluţie. a) Un număr este divizibil cu 156 dacă este divizibil cu 3, 4 şi 13......... **1p**

$A=3(1+3+3^2+\cdots+3^{2021})$, deci $A\vdots 3$ **1p**

$A=3(1+3)+3^3(1+3)+\cdots+3^{2021}(1+3)$, deci $A\vdots 4$ **1p**

$A=3(1+3+3^2)+3^4(1+3+3^2)+\cdots+3^{2020}(1+3+3^2)$, deci $A\vdots 13$ **1p**

b) $3A=3^2+3^3+3^4+\cdots+3^{2023}$, deci $A=(3^{2023}-3):2$. Atunci $2A+3=3^{2023}$ **1p**

Perechile căutate sunt $(p,n)\in\{(3,2023),(3^7,17\cdot 17),(3^{17},7\cdot 17),(3^{7\cdot 17},17),(3^{17\cdot 17},7),(3^{2023},1)\}$, adică 6 perechi.. **2p**

Problema 3. Fie $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOA}$ unghiuri formate în jurul unui punct. Se ştie că:

$$2\cdot\widehat{COD}=3\cdot\widehat{AOB},\ 10\cdot\widehat{BOC}=9\cdot\widehat{DOA}$$

şi

$$\frac{\widehat{AOB}}{2}=\frac{\widehat{BOC}}{9}.$$

a) Aătaţi că bisectoarele unghiurilor $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{AOD}$ formează un unghi drept.

b) Dacă OP este bisectoarea unghiului $\widehat{BOC}$ şi OQ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOD}$, aflaţi unghiul POQ.

Soluţie. Din $\frac{\widehat{AOB}}{2}=\frac{\widehat{BOC}}{9}=k$, deducem $\widehat{AOB}=2k$ şi $\widehat{BOC}=9k$ **1p**

Atunci $\widehat{COD}=3k$ şi $\widehat{DOA}=10k$ **1p**

Avem $2k+9k+3k+10k=360°$, $k=15°$ **1p**

Astfel $\widehat{AOB}=30°$, $\widehat{BOC}=135°$, $\widehat{COD}=45°$, $\widehat{DOA}=150°$ **1p**

a) Dacă OM şi OQ sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{AOD}$, atunci

$\widehat{MOQ}=\frac{1}{2}\left(\widehat{AOB}+\widehat{AOD}\right)=90°$ **1p**

b) $\widehat{POQ}=\widehat{POB}+\widehat{AOB}+\widehat{AOQ}$ **1p**

Deci $\widehat{POQ}=\frac{135°}{2}+30°+\frac{150°}{2}=172°30'$ **1p**

Problema 4. Fie mulţimea $A=\{2^a\cdot 7^b |\ a,b\in\mathbb{N}\}$.

a) Aflaţi cele mai mici 4 elemente din A care sunt pătrate perfecte;

b) Demonstraţi că printre oricare 5 elemente din mulţimea A există cel puţin două al căror produs este pătrat perfect.

Soluţie. a) Numerele căutate sunt: 1, 2^2, 2^4 şi 7^2 .... **2p**

b) $N=2^a\cdot 7^b$ este pătrat perfect dacă şi numai dacă a şi b sunt pare **1p**

După paritatea exponenţilor distingem patru forme de numere din A: $2^{par}\cdot 7^{par}$; $2^{par}\cdot 7^{impar}$; $2^{impar}\cdot 7^{par}$; $2^{impar}\cdot 7^{impar}$ **2p**

Conform *Principiului cutiei*, dacă alegem 5 numere, două dintre ele vor avea aceeaşi formă **1p**

Produsul lor va fi de forma $2^{par}\cdot 7^{par}$, adică pătrat perfect **1p**

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ

Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova.
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web www.isjdolj.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Barem de notare și evaluare

Olimpiada Natională de Matematică

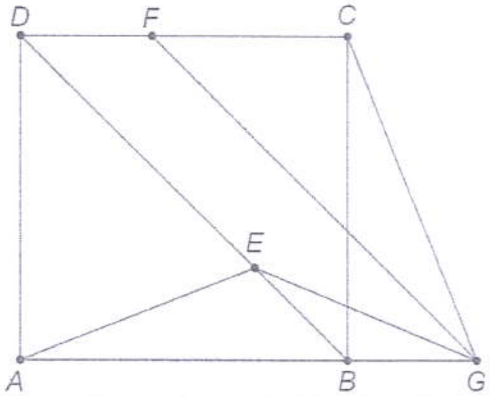
Etapa Locală, Județul Dolj, 11 februarie 2023

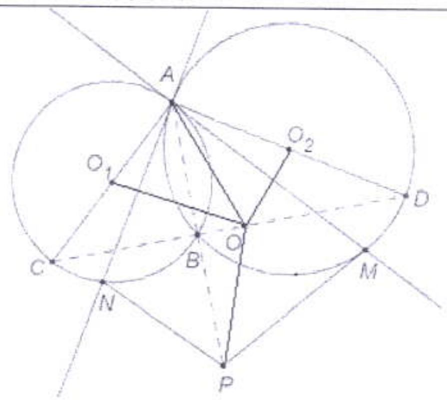
Etapa locală – clasa a VII-a

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**

1.a)	$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$	**1p**
	$\dfrac{2\left(2+\sqrt{3}\right)}{(3x+2)\left(\sqrt{3}+2\right)}=\dfrac{2}{3x+2}\in\mathbb{Z}$	**1p**
	$\Rightarrow 3x+2\mid 2 \Rightarrow 3x+2\in\{-2,-1,0,1\} \Rightarrow x\in\{-1,0\} \Rightarrow \operatorname{card}(A)=2$	**1p**
1.b)	$\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$	**1p**
	$A=\dfrac{1}{\sqrt{1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\ldots1+\dfrac{1}{\sqrt{2023}}-\dfrac{1}{\sqrt{2024}}$ $A=1-\dfrac{1}{\sqrt{2024}}=\dfrac{\sqrt{2024}-1}{\sqrt{2024}}$	**1p**
	$N=\dfrac{\sqrt{2024}-1}{\sqrt{2024}}\cdot\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2024}}\right)=\dfrac{\left(\sqrt{2024}-1\right)\left(\sqrt{2024}+1\right)}{2024}=\dfrac{2023}{2024}$	**1p**
	$\Rightarrow [N]=0$	**1p**
2.a)	Conform enunțului $\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}+\dfrac{1}{\sqrt{y_0}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}(A)$. Presupunem că x_0 și y_0 sunt numere rationale pătrate perfecte $\Rightarrow \sqrt{x_0}\in\mathbb{Q}$ și $\sqrt{y_0}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x_0}}\in\mathbb{Q}$ și $\dfrac{1}{\sqrt{y_0}}\in\mathbb{Q}$ $\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x_0}}+\dfrac{1}{\sqrt{y_0}}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n}}\in\mathbb{Q}$, contradicție cu n nu este pătrat perfect	**1p**
	Presupunem că doar unul dintre numerele x_0 sau y_0 este număr rațional pătrat perfect (1) $\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}+\dfrac{1}{\sqrt{y_0}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}+\dfrac{1}{\sqrt{y_0}}\right)^2=\dfrac{1}{n} \Rightarrow \dfrac{1}{x_0}+\dfrac{1}{y_0}+\dfrac{2}{\sqrt{x_0y_0}}=\dfrac{1}{n}$ $\Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{x_0y_0}}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{1}{y_0}$ și $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{1}{y_0}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{x_0y_0}}\in\mathbb{Q}$ $\Rightarrow \sqrt{x_0y_0}\in\mathbb{Q} \Rightarrow x_0y_0$ este număr rațional pătrat perfect (2)	**1p**

Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova.
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro

	Din (1) și (2) rezultă că și celălalt număr este pătrat perfect, ceea ce ar contrazice ipoteza făcută (1).	
2.b)	$\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{12}}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{12}}{12\sqrt{x}}$ $\Rightarrow \frac{1}{y}=\frac{x+12-4\sqrt{3x}}{12x}, x,y\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \sqrt{3x}\in\mathbb{Q}, x\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \sqrt{3x}\in\mathbb{N}^*$	1p
	$\Rightarrow 3x=k^2, k\in\mathbb{N}^* \Rightarrow 3\mid k^2 \Rightarrow 3\mid k \Rightarrow k=3a, a\in\mathbb{N}^*$ $\Rightarrow 3x=9a^2, a\in\mathbb{N}^* \Rightarrow x=3a^2, a\in\mathbb{N}^*$	1p
	Analog: $y=3b^2, b\in\mathbb{N}^*$	1p
	Ecuația devine: $\frac{1}{\sqrt{3}a}+\frac{1}{\sqrt{3}b}=\frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow b=\frac{2a}{a-2}, b\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a-2\mid 2a$ și ținând cont că $a-2\mid 2a-4 \Rightarrow a-2\mid 4$ $a-2\in\{1,2,4\} \Rightarrow a\in\{3,4,6\}$	1p
	1) $a=3 \Rightarrow b=6 \Rightarrow x=27, y=108$ 2) $a=4 \Rightarrow b=4 \Rightarrow x=48, y=48$ 3) $a=6 \Rightarrow b=3 \Rightarrow x=108, y=27$	1p
3.a)	ΔBGE este isoscel $\Rightarrow \sphericalangle BEG=\sphericalangle BGE=\frac{180^\circ-135^\circ}{2}=22^\circ30'$ 	1p
	$BGFD$ paralelogram $\Rightarrow BD\parallel FG \Rightarrow \sphericalangle FGE=\sphericalangle BEG=22^\circ30'$	1p
	Cum $BE=BD-BA \Rightarrow BD-BE=BA \Rightarrow DE=AB=AD$ $AG=AB+BG=DE+BE=BD=AC \Rightarrow \Delta ACG$ este isoscel, de unde $\sphericalangle AGC=\frac{180^\circ-45^\circ}{2}=67^\circ30'$, așadar $\sphericalangle CGF=67^\circ30'-45^\circ=22^\circ30'$ Obținem $\sphericalangle CGF\equiv\sphericalangle FGE\equiv\sphericalangle EGB$	2p
3.b)	$\Delta DAE\equiv\Delta DCE \Rightarrow AE=EC$	1p
	$AG=BD=GF \Rightarrow \Delta GAF$ este isoscel și GE este bisectoarea $\sphericalangle AGF$ $\Rightarrow GE$ este mediatoarea segmentului $AF \Rightarrow EF=AE$	1p
	$\sphericalangle EAG=90^\circ-\sphericalangle ADE=90^\circ-67^\circ30'=22^\circ30'$ $\Rightarrow \sphericalangle EAG\equiv\sphericalangle EGA \Rightarrow \Delta AEG$ este isoscel $\Rightarrow AE=EG$ Obținem $EA=EG=EC=GF$	1p

4.a)	AD diametru $\Rightarrow \sphericalangle ABD = 90°$, AC diametru $\Rightarrow \sphericalangle ACD = 90°$  	1p
	$\Rightarrow \sphericalangle CBD = 90° + 90° = 180°$ $\Rightarrow C,B,D$ coliniare	1p
4.b)	Considerăm O mijlocul segmentului CD. Dreapta CD este mediatoarea segmentului AP şi $O \in CD$ $\Rightarrow OP = OA$ (1)	1p
	OO_1 este linie mijlocie în ΔACD $\Rightarrow OO_1 \parallel AD$ Cum $AD \perp AN$ $\Rightarrow OO_1 \perp AN$ şi $O_1N = O_1A$ $\Rightarrow O_1O$ este mediatoarea segmentului AN $\Rightarrow OA = ON$ (2)	2p
	OO_2 este linie mijlocie în ΔACD $\Rightarrow OO_2 \parallel AC$ Cum $AC \perp AM$ $\Rightarrow OO_2 \perp AN$ şi $O_2M = O_2A$ $\Rightarrow O_2O$ este mediatoarea segmentului AM $\Rightarrow OA = OM$ (3)	1p
	$(1),(2),(3) \Rightarrow OA = OM = ON = OP$ $\Rightarrow A,M,P,N$ sunt conciclice $\Rightarrow AMPN$ este inscriptibil	1p

BAREM DE CORECTARE

Clasa a VIII-a

Problema 1	
a) $2x^2+9-6x\sqrt{2}\geq 0$	1p
$(x\sqrt{2}-3)^2\geq 0$	1p
b) $2a^2+9\geq 6a\sqrt{2}$,	1p
$\frac{a}{2a^2+9}\leq\frac{1}{6\sqrt{2}}$	1p
$\frac{b}{2b^2+9}\leq\frac{1}{6\sqrt{2}}$, $\frac{c}{2c^2+9}\leq\frac{1}{6\sqrt{2}}$	1p
$\frac{a}{2a^2+9}+\frac{b}{2b^2+9}+\frac{c}{2c^2+9}\leq\frac{3}{6\sqrt{2}}$	1p
$\frac{a}{2a^2+9}+\frac{b}{2b^2+9}+\frac{c}{2c^2+9}\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$	1p
TOTAL	**7p**
Problema 2	
$n=a^2$ și $n+2023=b^2$ și $a+b$ este pătrat perfect.	3p
$b^2-a^2=2023$	1p
$b+a=17^2$ singura soluție	1p
$a=141$, $b=148$	1p
$n=19881$	1p
TOTAL	**7p**
Problema 3	
a) $B'N\perp C'M$, $PM\perp(BCC')$, $PM\perp B'N$	1p
$B'N\perp(C'MP)$	1p
b) $A'C\perp(C'BD)$	1p
$O'N$ este linie mijlocie în $\Delta A'C'C$, $O'N\parallel A'C$	1p
$O'N\perp(C'BD)$, $(O'B'N)\perp(C'BD)$	1p
c) Fie $\{Q\}=O'N\cap C'O$, $\sphericalangle(C'N,(O'B'N))=\sphericalangle C'NQ$	1p
$C'Q=\frac{1}{2}C'F=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$, $sin(\sphericalangle C'NQ)=\frac{C'Q}{C'N}=\frac{\sqrt{6}}{3}$	1p
TOTAL	**7p**
Problema 4	
a) Fie N mijlocul segmentului AD, $MN\parallel CD$.	
$\sphericalangle(BM,CD)=\sphericalangle(BM,MN)=\sphericalangle BMN$	1p
E mijlocul lui MN, $\cos(\sphericalangle BME)=\frac{ME}{MB}=\frac{\sqrt{3}}{6}$	1p 1p
b) AM=x și $MN\parallel CD, N\in(AD)$.Construim $MP\perp AB, P\in AB$	1p
$\sin(\sphericalangle ABM)=\frac{MP}{MB}$	1p
$\cos(\sphericalangle BME)=\frac{ME}{MB}$	1p
$\frac{cos(\sphericalangle(BM,CD))}{sin(\sphericalangle ABM)}=\frac{ME}{MP}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	1p
TOTAL	**7p**

Soluții clasa a VIII-a

1. Inegalitatea este echivalentă cu $2x^2 + 9 - 6x\sqrt{2} \geq 0 \Leftrightarrow (x\sqrt{2} - 3)^2 \geq 0$, relație adevărată.

b) În inegalitatea, $2x^2 + 9 \geq 6x\sqrt{2}$ înlocuim pe x cu a obținem $2a^2 + 9 \geq 6a\sqrt{2}$, rezultă $\frac{a}{2a^2+9} \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}$ și $\frac{b}{2b^2+9} \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}$, $\frac{c}{2c^2+9} \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}$

Adunăm toate inegalitățile și obținem: $\frac{a}{2a^2+9} + \frac{b}{2b^2+9} + \frac{c}{2c^2+9} \leq \frac{3}{6\sqrt{2}}$

Rezultă $\frac{a}{2a^2+9} + \frac{b}{2b^2+9} + \frac{c}{2c^2+9} \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$

2. Din enunț rezultă n, n+2023 și

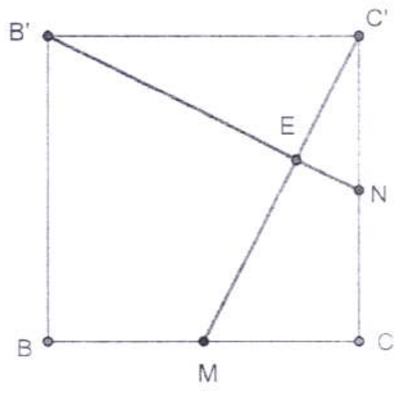
$\sqrt{n} + \sqrt{n + 2023}$, trebuie să fie pătrate perfecte, deci există a și b numere naturale astfel încât $n=a^2$ și $n+2023=b^2$ și $a+b$ este pătrat perfect.

Avem $b^2 - a^2 = 2023\ sau\ (b - a)(b + a) = 2023 = 7 \cdot 17^2$, $b+a$ pătrat perfect mai mare decât 1 deci, singura variantă este $b+a=17^2$ și $b-a=7$ cu soluția $a=141$, $b=148$

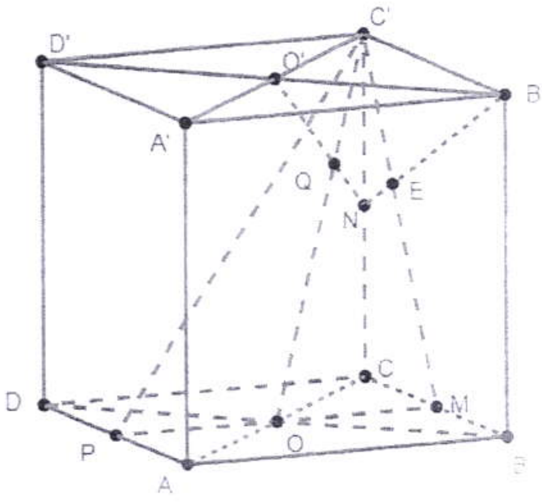
Rezultă $n=19881$.

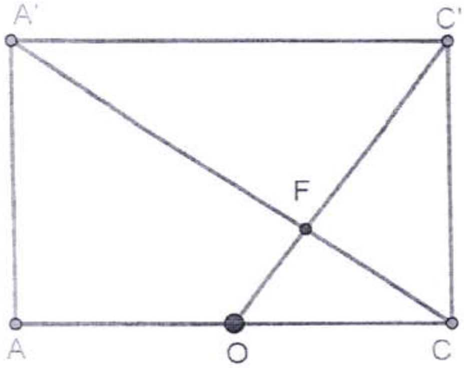
3. a) Deoarece $\Delta B'C'N \equiv \Delta C'CM(c.c.)$, rezultă

$\sphericalangle C'B'N \equiv \sphericalangle MC'C$. Dar, $\sphericalangle C'B'N + \sphericalangle B'NC' = 90^o$, obținem că $\sphericalangle MC'C + \sphericalangle B'NC' = 90^o$, adică $\Delta EC'N$ este dreptunghic în E, unde $\{E\} = B'N \cap C'M$.
Deci, $B'N \perp C'M$ (1). Deoarece $PM \parallel AB$, iar $AB \perp (BCC')$, rezultă $PM \perp (BCC')$.
Cum $B'N \subset (BCC')$, rezultă $PM \perp B'N$ (2).
Din relațiile (1) și (2), precum și din faptul că $PM, C'M \subset (BCC'), PM \cap C'M = \{M\}$, rezultă că $B'N \perp (C'MP)$.



b) Deoarece $CC' \perp (ABC)$ și $BD \subset (ABC)$, rezultă $CC' \perp BD$. Dar, $BD \perp AC$, iar $AC, C'C \subset (ACC'), AC \cap C'C = \{C\}$, rezultă că $BD \perp (ACC')$. Deoarece $A'C \subset (ACC')$, obținem că $BD \perp A'C$ (3)





Notăm cu $\{F\} = A'C \cap C'O$. Atunci $\Delta CFO \sim \Delta A'FC'$ (deoarece $OC \parallel A'C'$).

Atunci $\frac{OF}{FC'} = \frac{FC}{FA'} = \frac{OC}{A'C'} = \frac{1}{2}$. Dacă AB=$a$, obținem că $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}, C'O = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $A'C = a\sqrt{3}, FO = \frac{a\sqrt{6}}{6}$, $FC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Se verifică relația $OF^2 + FC^2 = OC^2$, de unde rezultă că $A'C \perp C'O$ (4).

Din relațiile (3) , (4) și din faptul că $BD, C'O \subset (C'BD), BD \cap C'O = \{O\}$, obținem că $A'C \perp (C'BD)$. Deoarece $O'N$ este linie mijlocie în $\Delta A'C'C$, rezultă $O'N \parallel A'C$, deci $O'N \perp (C'BD)$. Dar $O'N \subset (O'B'N)$, de unde rezultă $(O'B'N) \perp (C'BD)$.

c) Notăm $\{Q\} = O'N \cap C'O$. Din punctul b) rezultă $C'Q \perp (O'B'N)$.

Atunci $\sphericalangle(C'N, (O'B'N)) = \sphericalangle C'NQ$. Deoarece $O'N$ este linie mijlocie în $\Delta C'A'C$, rezultă $C'Q = \frac{1}{2}C'F = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Triunghiul $C'QN$ este dreptunghic Q, de unde rezultă că $sin(\sphericalangle C'NQ) = \frac{C'Q}{C'N} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

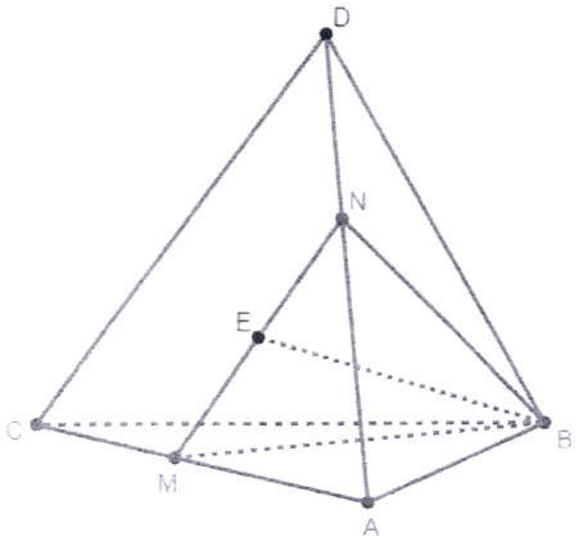
4. a) Notăm cu N mijlocul segmentului AD. Rezultă MN linie mijlocie în ΔACD, deci $MN \parallel CD$. Atunci $\sphericalangle(BM, CD) = \sphericalangle(BM, MN) = \sphericalangle BMN$.

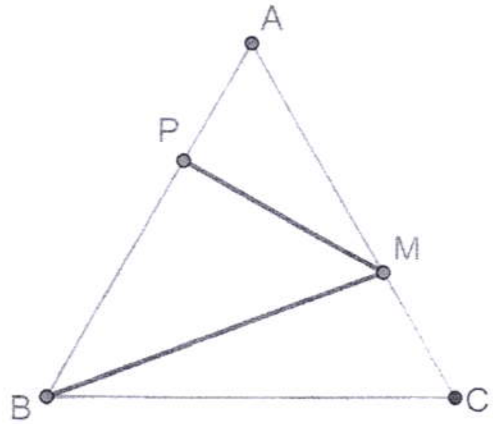
Dacă $AB = a$, atunci Δ BMN este isoscel, $BM = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Fie E mijlocul lui MN. Atunci $ME = \frac{1}{2}MN = \frac{a}{4}$, de unde rezultă $\cos(\sphericalangle BME) = \frac{ME}{MB}$, adică $\cos(\sphericalangle BME) = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

b) Dacă AM=x și $MN \parallel CD, N \in (AD)$, atunci ΔAMN este echilateral și MN=x.

Construim $MP \perp AB, P \in AB$. Din ΔAMP, $\sphericalangle MAP = 60^o$, obținem $MP = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.





$\sin(\sphericalangle ABM) = \frac{MP}{MB}$

$\cos(\sphericalangle BME) = \frac{ME}{MB}$.

Rezultă $\frac{cos(\sphericalangle(BM,CD))}{sin(\sphericalangle ABM)} = \frac{ME}{MP} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web. www.isjdolj.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
11.02.2023
Clasa a VI-a

Exercițiul 1. Arătați că dacă a, b, c sunt cifre nenule și

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ab0}+\overline{ac}}=\frac{\overline{bc}}{\overline{bc0}+\overline{ba}}=\frac{\overline{ca}}{\overline{ca0}+\overline{cb}},$$

atunci $a=b=c$.

Exercițiul 2. Se consideră numărul $A=3+3^2+3^3+\cdots+3^{2022}$.

a) Arătați că A se divide cu 156.

b) Determinați numărul perechilor (p,n) de numere naturale pentru care $p^n=2\cdot A+3$.

G.M. 10/2022

Exercițiul 3. Fie $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOA$ unghiuri formate în jurul unui punct.

Se știe că:

$$2\cdot\sphericalangle COD=3\cdot\sphericalangle AOB,\ 10\cdot\sphericalangle BOC=9\cdot\sphericalangle DOA$$

și

$$\frac{\sphericalangle AOB}{2}=\frac{\sphericalangle BOC}{9}.$$

a) Arătați că bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOD$ formează un unghi drept.

b) Dacă OP este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$ și OQ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOD$, aflați unghiul $\sphericalangle POQ$.

Exercițiul 4. Fie mulțimea $A=\{2^a\cdot 7^b \mid a,b\in\mathbb{N}\}$.

a) Aflați cele mai mici patru elemente din A care sunt pătrate perfecte.

b) Demonstrați că printre oricare cinci elemente din mulțimea A, există cel puțin două al căror produs este pătrat perfect.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 2 ore.*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN DOLJ

Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
11 februarie 2023

Soluții clasa a IX-a

1. a) Dacă $a \in \left[k, k+\frac{1}{2}\right), k \in Z$, rezultă $[a] = k, \left[a+\frac{1}{2}\right] = k, [2a] = 2k$, deci $[a] + \left[a+\frac{1}{2}\right] = [2a]$.

Dacă $a \in \left[k+\frac{1}{2}, k+1\right), k \in Z$, rezultă $[a] = k, \left[a+\frac{1}{2}\right] = k+1, [2a] = 2k+1$, deci $[a] + \left[a+\frac{1}{2}\right] = [2a]$.

b) Observăm că $\frac{2x+5}{12} = \frac{2x-1}{12} + \frac{1}{2}$, de unde obținem $\left[\frac{2x-1}{12}\right] + \left[\frac{2x+5}{12}\right] = \left[\frac{2x-1}{12}\right] + \left[\frac{2x-1}{12} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{2x-1}{6}\right]$.

Ecuația devine: $\left[\frac{2x-1}{6}\right] + \left[\frac{x+1}{3}\right] = \frac{3x+1}{2}$.

Procedând la fel, obținem: $\frac{x+1}{3} = \frac{2x-1}{6} + \frac{1}{2}$, deci $\left[\frac{2x-1}{6}\right] + \left[\frac{x+1}{3}\right] = \left[\frac{2x-1}{6}\right] + \left[\frac{2x-1}{6} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{2x-1}{3}\right]$.

Ecuația devine $\left[\frac{2x-1}{3}\right] = \frac{3x+1}{2}$.

$$\frac{3x+1}{2} \leq \frac{2x-1}{3} < \frac{3x+1}{2} + 1 \Rightarrow -\frac{11}{5} < x \leq -1$$

$\frac{3x+1}{2} \in Z \Longrightarrow x \in \left\{-\frac{5}{3}, -1\right\}$.

2. a) Din ipoteză rezultă că M este mijlocul lui AB, P este mijlocul lui CD, $\overrightarrow{BN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$. Avem:
$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$.

b) Fie S mijlocul segmentului NQ. Rezultă $\overrightarrow{MS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ}\right)$ și $2\overrightarrow{MP} = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP}\right) + \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP}\right) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Obținem $2\overrightarrow{MP} = \frac{4}{3}\left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ}\right) = \frac{8}{3}\overrightarrow{MS}$, deci $\overrightarrow{MP} = \frac{4}{3}\overrightarrow{MS}$, de unde obținem că punctele M, S și P sunt coliniare, adică dreapta MP trece prin mijlocul segmentului NQ.

3. Presupunem, prin absurd, că propoziția este adevărată, deci există $q \in N$ astfel încât $\left(p + \sqrt{p^2 + 2021}\right)^2 = \sqrt{q^2 + q}$ adică $2p^2 + 2021 + 2p\sqrt{p^2 + 2021} =$ $= \sqrt{q^2 + q}$. Ridicând egalitatea anterioară la pătrat și notând $x = 2p^2 + 2021$, obținem:

$$x^2 + 4p^2(p^2 + 2021) + 4px\sqrt{p^2 + 2021} = q^2 + q.$$

Rezultă că $\sqrt{p^2 + 2021}$ este număr rațional, deci există $k \in N$ astfel încât $p^2 + 2021 = k^2$ sau $(k - p)(k + p) = 2021$. Avem soluțiile naturale $(k, p) = (1011,1010)$, pentru care egalitatea din enunț conduce la $q(q + 1) =$ $= 2021^4$, respectiv $(k, p) = (45,2)$ pentru care obținem $q(q + 1) = 47^4$. Niciuna dintre variante nu convine, deoarece $q(q + 1)$ este număr par.

4. Cum $(x^5 - y^5)(x - y) \geq 0$, obținem că $x^6 + y^6 \geq xy(x^4 + y^4)$ de unde rezultă că $\frac{x^6+y^6}{x^4+y^4} \geq xy$. (1)

Deoarece $x, y \geq 2$ rezultă că $(x - 1)(y - 1) \geq 1$ echivalent cu $xy \geq x + y$. (2)

Din relațiile (1) și (2) obținem $\frac{x^6+y^6}{x^4+y^4} \geq x + y$.

Analog rezultă că $\frac{y^6+z^6}{y^4+z^4} \geq y + z$ și $\frac{z^6+x^6}{z^4+x^4} \geq z + x$.

Prin adunarea celor trei inegalități obținem $\frac{x^6+y^6}{x^4+y^4} + \frac{y^6+z^6}{y^4+z^4} + \frac{z^6+x^6}{z^4+x^4} \geq 2(x + y + z)$.

BAREM DE CORECTARE

Clasa a IX-a

Problema 1

a) $a \in \left[k, k+\frac{1}{2}\right), k \in Z \Rightarrow [a] + \left[a+\frac{1}{2}\right] = [2a]$ $a \in \left[k+\frac{1}{2}, k+1\right), k \in Z \Rightarrow [a] + \left[a+\frac{1}{2}\right] = [2a]$	1p 1p
b) $\frac{2x+5}{12} = \frac{2x-1}{12} + \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\frac{2x-1}{6}\right] + \left[\frac{x+1}{3}\right] = \frac{3x+1}{2}$ $\frac{x+1}{3} = \frac{2x-1}{6} + \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\frac{2x-1}{3}\right] = \frac{3x+1}{2}$ Finalizare: $x \in \left\{-\frac{5}{3}, -1\right\}$	2p 1p 2p
TOTAL	**7p**

Problema 2

a) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AQ} =$ $= \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$	3p
b) $\overrightarrow{MS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ}\right)$, S mijlocul lui NQ $2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{MP} = \frac{4}{3}\overrightarrow{MS}$ Finalizare: dreapta MP trece prin mijlocul segmentului NQ	1p 1p 1p 1p
TOTAL	**7p**

Problema 3

Presupunem că există $q \in N$ astfel încât $2p^2 + 2021 +$ $+2p\sqrt{p^2+2021} = \sqrt{q^2+q}$ $x^2 + 4p^2(p^2+2021) + 4px\sqrt{p^2+2021} = q^2 + q$, unde $x = 2p^2 + 2021$ $\sqrt{p^2+2021} = k, k \in N \Leftrightarrow (k-p)(k+p) = 2021$ $(k,p) = (1011,1010) \Longrightarrow q(q+1) = 2021^4$, fals $(k,p) = (45,2) \Longrightarrow q(q+1) = 47^4$, fals	1p 2p 2p 1p 1p

TOTAL	7p

Problema 4

$(x^5 - y^5)(x - y) \geq 0 \Rightarrow x^6 + y^6 \geq xy(x^4 + y^4) \Rightarrow \frac{x^6+y^6}{x^4+y^4} \geq xy$	2p
Deoarece $x, y \geq 2$ rezultă că $(x - 1)(y - 1) \geq 1$ echivalent cu $xy \geq x + y$	2p
$\frac{x^6+y^6}{x^4+y^4} \geq x + y$ și analog $\frac{y^6+z^6}{y^4+z^4} \geq y + z$, $\frac{z^6+x^6}{z^4+x^4} \geq z + x$	2p
Finalizare	1p
TOTAL	7p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
11 februarie 2023

SOLUŢII ŞI BAREM

Clasa a X-a

Problema 1.

Avem $2x+\frac{y}{x}=x+x+\frac{y}{x}\geq 3\sqrt[3]{xy}$,

cu egalitate dacă şi numai dacă $x=\frac{y}{x}$, adică $x^2=y$. **(1p)**

Ţinând cont că $3xy>1$ (deoarece $x,y\in\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right)$), avem:

$\log_{3xy}\left(2x+\frac{y}{x}\right)\geq \log_{3xy}(3\sqrt[3]{xy})=\frac{1}{\log_3(3xy)}+\frac{1}{3}\cdot\log_{3xy}(xy)$, (1)

Scriind şi celelalte două relaţii analoage cu (1) şi însumând cele trei inegalităţi membru cu membru, obţinem: $E\geq\sum\frac{1}{\log_3(3xy)}+\frac{1}{3}\cdot\sum\log_{3xy}(xy)$, (2) , unde E este membrul stâng al inegalităţii din enunţ, iar sumele sunt circulare. **(2p)**
În relaţia (2) avem egalitate dacă şi numai dacă : $x^2=y, y^2=z, z^2=x$, (*). Din relaţiile (*) obţinem $x^4=z$ şi $z^2=x$, de unde $x=z=1$ şi atunci $y=1$. Deci în (2) avem egalitate dacă şi numai dacă :
$x=y=z=1$, (**). **(2p)**
Cum $\sum\log_{3xy}(xy)=3-\sum\frac{1}{\log_3(3xy)}$, relaţia (2) devine: $E\geq 1+\frac{2}{3}\cdot\sum\frac{1}{\log_3(3xy)}$, (3). Ţinând cont că $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$, $(\forall)a,b,c>0$, avem
$\sum\frac{1}{\log_3(3xy)}\geq\frac{9}{\log_3(27(xyz)^2)}$, (4), cu egalitate dacă şi numai dacă $xy=yz=zx \iff x=y=z$, (***). Din relaţiile (3) şi (4) rezultă imediat inegalitatea cerută în enunţ. Cazul de egalitate se obţine din (**) şi (***), adică pentru $x=y=z=1$. **(2p)**

Problema 2.
a) Pentru $x=0$ obţinem $f(f(y))=y+(f(0))^2, (\forall)y\in\mathbb{R}\Rightarrow f\circ f$ este bijectivă şi deci f bijectivă..**1p**

b) Fie $f(0)=a$. Din surjectivitate$\Rightarrow$ $(\exists)$ $u\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(u)=0$
Pentru $x=0$ şi $y=u\Rightarrow a=u+a^2\Rightarrow u=a-a^2$ **1p**
Pentru $x=u$ şi $y=0\Rightarrow f(u^2+a)=0=f(u)$ şi deoarece f injectivă$\Rightarrow u^2+a=u\Rightarrow$
$(a-a^2)^2+a=a-a^2\Rightarrow a^2((1-a)^2+1)=0\Rightarrow a=0\Rightarrow f(0)=0$. **1p**

c) Obţinem $f(f(y))=y, (\forall)y\in\mathbb{R}\Rightarrow f(y)=f^{-1}(y), (\forall)y\in\mathbb{R}$. **1p**
Punând $y=f(x)$ în relaţia iniţială $\Rightarrow$ $f(x^2+x)=\left(f(x)\right)^2+f(x), (\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

Pentru $x = -1 \Longrightarrow f(0) = \left(f(-1)\right)^2 + f(-1) \Longrightarrow f(-1) = -1$ deoarece f injectivă.
Punând $y = f(y)$ în relația inițială $\Longrightarrow f(x^2 + y) = \left(f(x)\right)^2 + f(y), (\forall)x, y \in \mathbb{R}$ de unde, pentru $x = -1 \Longrightarrow f(y+1) = f(y) + 1, (\forall)y \in \mathbb{R}$. **1p**
Prin inducție matematică, urmează că $f(y+n) = f(y) + n, (\forall)n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow f(n) = n, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$.
Deci, $f^{-1}(2023) = f(2023) = 2023$..**2p**

Problema 3.
Fie $a = \frac{z_1}{z_2}, b = \frac{z_2}{z_3}$ și $c = \frac{z_3}{z_1} \Longrightarrow |a| = |b| = |c| = 1$ și $a + b + c = 1$.
Fie $A(a), B(b)$ și $C(c) \Longrightarrow$ punctele $A(a), B(b)$ și $C(c)$ aparțin cercului unitate și $H(a+b+c)$ este ortocentrul triunghiului ABC. **1p**
Deoarece $a + b + c = 1 \Longrightarrow |a+b+c| = 1 \Longrightarrow H(a+b+c)$ aparține cercului unitate de unde avem că triunghiul ABC este dreptunghic și deci ortocentrul său coincide cu unul dintre vârfuri. **2p**
Din simetrie, putem presupune că triunghiul ABC este dreptunghic în $A \Longrightarrow H = A \Longrightarrow a + b + c = a \Longrightarrow a = 1$ și $b + c = 0 \Longrightarrow z_1 = z_2$ și $z_3^2 = -z_1^2$. **2p**
$|z_1^{2022} + z_2^{2022} + z_3^{2022}| = |z_1^{2022} + z_1^{2022} + (z_3^2)^{1011}| = |z_1^{2022} + z_1^{2022} + (-z_1^2)^{1011}| =$
$= |z_1^{2022} + z_1^{2022} - z_1^{2022}| = |z_1^{2022}| = |z_1|^{2022} = 1$..**2p**

Problema 4.
Din identitatea paralelogramului avem că $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 2(|z|^2 + 1)$........................**2p**
Deoarece $|z| \leq 1$, obținem că $1 \geq \frac{|z|^2+1}{2} = \frac{|z-1|^2+|z+1|^2}{4}$. **2p**
Folosind inegalitatea mediilor rezultă că
$1 \geq \frac{|z-1|^2+|z+1|^2}{4} = \frac{|z-1|^2+3\cdot\frac{1}{3}|z+1|^2}{4} \geq \sqrt[4]{|z-1|^2 \cdot \left(\frac{1}{3}|z+1|^2\right)^3}$ **2p**
Deci, $27 \geq |z-1|^2 \cdot |z+1|^6 \Longrightarrow 3\sqrt{3} \geq |z-1| \cdot |z+1|^3 = |z^2-1| \cdot |z-1|^2$........................**1p**

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
11 februarie 2023

Clasa a XI-a

Barem de corectare și evaluare

1. A= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, Tr(A)=a+d, det(A)= ad-bc, $atunci\ \ A^2 - Tr(A)\ A + det(A)I_2 = O_2 (1)$......1p

a) Det $(X^3) = 1,\ deci\ det(X) = 1$..1p

Notăm cu t urma matricei X și din relația (1) $se\ obtine\ \ X^2 = t\,X - I_2$,

$X^3 = (t^2 - 1)X - tI_2$..2p

Tr$(X^3) = Tr((t^2 - 1)X - tI_2)$=$(t^2$-1)Tr(X)- t Tr$(I_2)$=$t^3$-t-2t.......................................1p

t^3-3t=18, deci t=3, $X^3 = 8X - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$..1p

X=$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$..1p

2.

AB=BA implică $A^4+A^2B^2+B^4=(A^2+AB+B^2)(A^2-AB+B^2)$..................................2p

det(A^2+AB+B^2)det(A^2-AB+B^2)=9..1p

În relația det(X+Y)+det(X-Y)=2(det(X)+det(Y)) , obținem pentru X=A^2+B^2 și Y= AB

det(A^2+AB+B^2)+ det(A^2-AB+B^2)=2(det(A^2+B^2)+det(AB))=10.........................2p

det(A^2+AB+B^2) și det(A^2-AB+B^2) sunt egale cu 1 și 9..................................1p

suma cerută este 1+3=4 ....1p

3. Din $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ avem

$a_{n+1} - a_n = \ln(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - \ln(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$,

deci șirul $(a_n)_{n\geq 1}$este strict crescător 1p

Presupunând că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este și mărginit superior, rezultă că este convergent și notăm $l = \lim_{n\to\infty} a_n$. 1p

Din relația de recurență obținem că $e^{a_{n+1}} = a_1 + a_2 + ... + a_n$, deci $e^{a_{n+1}} = e^{a_n} + a_n$. Trecând la limită obținem $e^l = e^l + l$, deci $l = 0$. Pe de altă parte, cum șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător, $l \geq a_1 > 0$, contradicție! Deci șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător și nemărginit superior, deci are limita ∞..........2p

Deducem că $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot e^{-a_n} = 0$..........1p

Atunci $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)\cdot e^{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(a_1+a_2+...+a_n) - \ln(a_1+a_2+...+a_{n-1})}{a_n}\cdot e^{a_n}$, de unde

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)\cdot e^{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1 + \dfrac{a_n}{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}\right)}{a_n}\cdot e^{a_n} =$$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n\cdot e^{-a_n})}{a_n\cdot e^{-a_n}} = 1$,..........2p

4. Cum $x - 1 < [x] \leq x, \forall x \in R$ rezultă $\frac{n}{\sqrt{k}} - 1 < \left[\frac{n}{\sqrt{k}}\right] < \frac{n}{\sqrt{k}}, \forall k = \overline{1,n} \Rightarrow n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 1\right) < \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{\sqrt{k}}\right] \leq n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$..........2p

Dacă $b_n = \frac{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{\sqrt{k}}\right]}{na_n}$ rezultă $\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 1}{a_n} < b_n < \frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}}{a_n}$ (1)..........2p

Cum $a_1 > 0$, demonstrăm prin inducție matematică că $a_n > 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n} > 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow$ șirul a_n este strict crescător, deci există $\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \overline{R}$, trecând la limită obținem $l = \infty$..........1p

Dacă $u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}}{a_n}$, folosind Cesaro-Stolz, obținem : L= $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{a_{n+1} - a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}$ (2)..........1p

Dar $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{a_n} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{a_n} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{a_n}{\sqrt{n}}} = \frac{2}{L}$ deci $L = \frac{2}{L}$ rezultă $L = \sqrt{2}$.

Conform criteriului "cleștelui" rezultă $\lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2}$..........1p

Subiectul 1, soluţie (barem de corectare)

$$I=\int_a^b \frac{c+a\sin^n x+b\cos^n x}{4c+\pi(\sin^n x+\cos^n x)}\,dx=\int_a^b \frac{c+a\cos^n(\frac{\pi}{2}-x)+b\sin^n(\frac{\pi}{2}-x)}{4c+\pi[\cos^n(\frac{\pi}{2}-x)+\sin^n(\frac{\pi}{2}-x)]}\,dx$$

$$=\int_a^b (-1)(\frac{\pi}{2}-x)'\frac{c+a\cos^n(\frac{\pi}{2}-x)+b\sin^n(\frac{\pi}{2}-x)}{4c+\pi[\cos^n(\frac{\pi}{2}-x)+\sin^n(\frac{\pi}{2}-x)]}\,dx \qquad \text{(2p)}$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{2}-a=b}^{\frac{\pi}{2}-b=a} \frac{c+a\cos^n x+b\sin^n x}{4c+\pi(\cos^n x+\sin^n x)}\,dx=\int_a^b \frac{c+a\cos^n x+b\sin^n x}{4c+\pi(\cos^n x+\sin^n x)}\,dx. \qquad \text{(2p)}$$

Rezultă că

$$2I=\int_a^b \frac{c+a\sin^n x+b\cos^n x+c+a\cos^n x+b\sin^n x}{4c+\pi(\cos^n x+\sin^n x)}\,dx \qquad \text{(2p)}$$

$$=\int_a^b \frac{2c+(a+b)(\sin^n x+b\cos^n x)}{4c+\pi(\cos^n x+\sin^n x)}\,dx=\frac{1}{2}\int_a^b dx=\frac{b-a}{2}.$$

deci $I=\frac{b-a}{4}$. (1p)

Subiectul 2, soluţie (barem de corectare)

In relaţia dată înlocuim pe x cu $\pi - x$ şi obţinem:

$$f(\pi - x)\sin x - f(x) = \cos^2 x, \text{ pentru orice } x \in [0,\pi]. \qquad \mathbf{(1p)}$$

Inmulţim relaţia din ipoteză cu $\sin x$ şi obţinem, pentru orice $x \in [0,\pi]$,

$$f(x)\sin^2 x - f(\pi - x)\sin x = \sin x\cos^2 x. \qquad \mathbf{(1p)}$$

Prin adunarea acestor două relaţii obţinem

$$-f(x)\cos^2 x = (1+\sin x)\cos^2 x,$$

deci

$$\cos^2 x(1+\sin x + f(x)) = 0 \text{ pentru orice } x \in [0,\pi]. \qquad \mathbf{(2p)}$$

Prin urmare

$$f(x) = \begin{cases} -1-\sin x, & x \neq \frac{\pi}{2} \\ a, & x = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \qquad \mathbf{(1p)}$$

Funcţia f are proprietatea lui Darboux deoarece admite primitive.

Pentru $a \neq -2$ ar rezulta că f are discontinuităţi de prima speţă, contradicţie. **(1p)**

Rezultă că $a = -2$, deci $f(x) = -1 - \sin x$, pentru orice $x \in [0,\pi]$. Prin urmare, primitivele lui f sunt de forma

$$F(x) = -x + \cos x + c \quad \forall x \in [0,\pi], \text{ unde } c \in \mathbb{R}. \qquad \mathbf{(1p)}$$

Subiectul 3, soluţie (barem de corectare)

(a) Fie $x \in G$ cu $x^2 = e$. Fixând un element $a \in G$, avem (din ipoteză)

$$ax^2 = e^2a \Longrightarrow x = e. \qquad (1p)$$

Aşadar, $x^2 = e \Longrightarrow x = e$ sau, echivalent,

$$x \neq e \Longrightarrow x^2 \neq e. \qquad (1p)$$

(b) Fie $x, y \in G$ arbitrare. Folosind relaţia (*) deducem că

$$x^{-1}(xy)^2 = (yx)^2x^{-1} \Longrightarrow xy = yx.$$

deci G este abelian. (2p)

(c) Fie G un grup abelian cu proprietatea

$$x \neq e \Longrightarrow x^2 \neq e.$$

Vom arăta că are loc (*).

Luăm $x, y, z \in G$ astfel încât $xy^2 = z^2x$, deci (din comutativitate) avem $xy^2 = xz^2$. Obţinem că $y^2 = z^2$. (1p)

Avem

$$y^2 = z^2 \Longleftrightarrow (yz^{-1})^2 = e \Longrightarrow y = z, \qquad (2p)$$

adică funcţionează relaţia (*).

Subiectul 4, soluţie (barem de corectare)

Se ştie că orice grup cu un număr prim de elemente este ciclic şi oricare element al său diferit de elementul neutru este un generator al grupului. **(2 p)**

Aşadar grupul considerat va fi ciclic şi deci abelian.

$$a \star b = d \,|_s \star c \Longrightarrow (c \star a) \star b = c \star d,$$

deci

$$e \star b = c \star d, \;\; c \star d = d \star c = b, \;\text{ adică } e \star b = b. \qquad \textbf{(1p)}$$

Această ultimă egalitate arată că e este element neutru. **(1p)**

Notând cu G grupul considerat, luându-l pe a drept generator, vom avea $G = \{e, a, a^2, a^3, a^4\}$.

Deoarece $c \star a = e$, deducem $c = a^4$. **(1p)**

Rezultă $\{b, d\} = \{a^2, a^3\}$.

Dacă $b = a^3$ şi $d = a^2$, atunci $a \star b = a^4 \neq d = a^2$. Deci $b = a^2$ şi $d = a^3$. **(1p)**

Avem $G = \{e, a, a^2 = b, d = a^3, c = a^4\}$. Tabla grupului este

$\star$	a	b	c	d	e
a	b	d	e	c	a
b	d	c	a	e	b
c	e	a	d	b	c
d	c	e	b	a	d
e	a	b	c	d	e

(1p)