Concursul interjudeţean de matematică "ŞTEFAN VELOVAN" -ediţia a XVI-a

<Subiecte - clasa a IV-a>

Partea I

1. Ce număr trebuie scris în locul semnului de întrebare?

12	3		14	18		28	15		13	32
18	24		25	4		7	23		28	?

a) 10	**b)** 4	**c)** 12	**d)** 6	**e)** 5	**f)** 0

2. Câte numere de nouă cifre se pot forma cu o cifră de 1, două cifre de 2 şi şase cifre de 0?

a) 1	**b)** 84	**c)** 14	**d)** 28	**e)** 42	**f)** 100

3. Aflaţi suma a zece numere naturale ştiind că suma primelor nouă numere este 100, iar suma produselor dintre al zecelea număr cu fiecare dintre primele nouă numere este 700.

a) 107	**b)** 103	**c)** 145	**d)** 125	**e)** 121	**f)** 110

4. În noaptea de *Moş Nicolae* mama a pus pe masă o cutie de bomboane pentru cei trei copii ai săi. Primul copil s-a trezit, a mâncat o treime din bomboane şi s-a culcat la loc. Al doilea copil s-a trezit, a mâncat o treime din bomboanele găsite şi s-a culcat la loc. Al treilea copil s-a trezit, a mâncat o treime din bomboanele pe care le-a găsit şi astfel au mai rămas 8 bomboane. Câte bomboane a mâncat al doilea copil?

a) 3	**b)** 6	**c)** 9	**d)** 10	**e)** 11	**f)** 12

5. Andrei are 97 de nuci şi 143 alune. El mănâncă în fiecare zi o nucă şi o alună. După câte zile numărul alunelor rămase este de două ori mai mare decât numărul nucilor rămase?

a) 46	**b)** 51	**c)** 47	**d)** 49	**e)** 48	**f)** 53

6. Două mere cântăresc cât trei pere, patru pere cântăresc cât cinci piersici, iar trei piersici cântăresc cât opt nuci. Care este valoarea numărului n, dacă trei mere cântăresc cât n nuci?

a) 3	**b)** 5	**c)** 15	**d)** 16	**e)** 8	**f)** 10

Partea a II-a

1. Sunt un număr natural de patru cifre, cu suma cifrelor de două ori mai mare decât suma cifrelor numărului natural următor. Cine pot fi?

(Gazeta Matematică, nr. 4/2022)

2. Pe tablă s-a desenat un dreptunghi împărţit în patru pătrăţele. În fiecare pătrăţel s-a scris cifra 0:

0	0	0	0

Cei 25 de elevi din clasă au mers la tablă pe rând. Fiecare şi-a ales un dreptunghi format din două pătrăţele alăturate şi a adăugat câte o unitate la numerele existente în cele două pătrăţele alăturate. La sfârşit, după ce două numere au fost şterse, pe tablă a rămas:

4			10

Găsiţi numerele care au fost şterse.

(Gazeta Matematică, nr. 9/2022)

[0]**Notă:**

- Pentru Partea I se va scrie pe foaia de concurs numai varianta corectă, fără demonstraţie. Fiecare răspuns corect va primi câte 10 puncte.
- Pentru Partea a II-a se cere demonstraţia completă, pentru care se vor acorda maxim 30 puncte.
- Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timp de lucru 2 ore.

Concursul interjudeţean de matematică "ŞTEFAN VELOVAN" -ediţia a XVI-a

<Barem de evaluare şi notare - clasa a IV-a>

Oficiu ________________ Total 10p

Partea I

1. d)	**2. b)**	**3. a)**	**4. b)**	**5. b)**	**6. c)**

________________ Total 60p

Partea a II-a

1.

▲ Fie $\overline{abcd}$ numărul; deci $\overline{abcd}+1$ este succesorul său. Deoarece $\overline{abcd}+1$ are suma cifrelor mai mică decât $\overline{abcd}$, rezultă $d=9$. 2p

Cazul $c<9$.

▲ $\overline{abc9}+1=\overline{ab\,(c+1)\,0}$. Avem $a+b+c+9=2\times(a+b+c+1+0)$. Se obţine: $a+b+c=7$. 3p

▲ Numerele sunt: 7009, 6109, 6019, 1609, 1069, 5119, 1519, 1159, 5209, 5029, 2059, 2509, 4309, 4039, 3409, 3049, 4129, 4219, 2419, 2149, 1249, 1429, 3319, 3139, 1339, 3229, 2329, 2239. .... 4p

Cazul $c=9$ *şi* $b<9$.

▲ $\overline{ab99}+1=\overline{a\,(b+1)\,00}$. Avem $a+b+9+9=2\times(a+b+1)$. Se obţine: $a+b=16$. Numărul poate fi doar 8899. .... 3p

Cazul $c=9$ *şi* $b=9$.

▲ $\overline{a999}+1=\overline{(a+1)\,000}$. Avem $a+27=2\times(a+1)$. Se obţine $a=25$, ceea ce nu convine. 3p

________________ Total 15p

2.

▲ Cei 25 de elevi au pus $25\times 2=50$ de unităţi. 3p

▲ Al doilea pătrăţel a fost ales odată cu primul pătrăţel de 4 ori. 3p

▲ Ultimul pătrăţel a fost ales odată cu al treilea pătrăţel de 10 ori. 3p

▲ $4+4+10+10=28$; $50-28=22$, deci al doilea şi al treilea pătrăţel au fost alese împreună de $22:2=11$ ori. 3p

▲ La final, înainte de a şterge cele două numere, pe tablă a fost scris: $\boxed{4}\boxed{15}\boxed{21}\boxed{10}$. Aşadar, cele două numere şterse sunt 15 şi 21. .... 3p

________________ Total 15p

Concursul interjudeţean de matematică "ŞTEFAN VELOVAN" -ediţia a XVI-a

<Subiecte - clasa a V-a>

1. Care este cea mai mică valoare a numărului natural n, pentru care $a = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n}{485}$ este număr natural?

a) 95	**b)** 485	**c)** 96	**d)** 97	**e)** 98	**f)** 99

2. Ultima cifră a numărului $n = 8 + 8^2 + 8^3 + ... + 8^{2020} + 2023$ este:

a) 1	**b)** 5	**c)** 3	**d)** 7	**e)** 9	**f)** 0

3. Numărul natural de forma $\overline{abc}$ astfel încât $(a-1) \cdot (b-2) \cdot (c+2020) = 2023$ are suma cifrelor:

a) 11	**b)** 9	**c)** 4	**d)** 5	**e)** 7	**f)** 8

4. Soluţia ecuaţiei $x + 2^{2021} - 2^{2020} - 2^{2019} - ... - 1 = 2020$ este:

a) 2020	**b)** 2019	**c)** 0	**d)** 2023	**e)** 2021	**f)** -1

5. Suma primelor 16 zecimale ale numărului $\dfrac{1}{111}$ este:

a) 45	**b)** 54	**c)** 36	**d)** 27	**e)** 18	**f)** 9

6. Avem produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2020$ din care eliminăm toţi factorii pari şi pe aceia care au ca ultimă cifră pe 5. Produsul numerelor rămase are ca ultimă cifră pe:

a) 3	**b)** 7	**c)** 1	**d)** 9	**e)** 5	**f)** 2

Partea a II-a

1. Determinaţi numărul prim p şi numărul natural n pentru care $p^2 + 2^{2p+1} - 53 = 2020^n$.

(Gazeta Matematică, nr. 5/2020)

2. Suma vârstelor, exprimate în ani, a mai multor copii este un număr prim p. Dacă peste trei ani suma vârstelor va fi egală cu p^2, aflaţi ce vârstă are fiecare copil (presupunem că vârsta fiecărui copil este număr natural nenul).

(Gazeta Matematică, nr. 4/2021)

[0]**Notă:**

- Pentru Partea I se va scrie pe foaia de concurs numai varianta corectă, fără demonstraţie. Fiecare răspuns corect va primi câte 10 puncte.
- Pentru Partea a II-a se cere demonstraţia completă, pentru care se vor acorda maxim 30 puncte.
- Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timp de lucru 2 ore.

Concursul interjudeţean de matematică "ŞTEFAN VELOVAN" -ediţia a XVI-a

<Barem de evaluare şi notare - clasa a V-a>

Oficiu ________________ Total 10p

Partea I

1. d)	2. c)	3. f)	4. b)	5. a)	6. c)

________________ Total 60p

Partea a II-a

1.

▲ Dacă $p = 2$, membrul stâng este număr impar, iar membrul drept este număr par, deci egalitatea este imposibilă. 2p

▲ Pentru $p \geq 3$, p este impar, deci $p = 2k + 1, k$ număr natural nenul. 2p

▲ $2^{2p+1} = 2^{4k+3}$ şi ultima cifră a lui 2^{4k+3} este 8. .... 4p

▲ $u(2^{2p+1} - 53) = 5$. 2p

▲ $u(p^2) = 5$, p fiind prim, rezultă $p = 5$. 2p

▲ Din $25 + 2^{2p+1} - 53 = 2020^n$ obţinem $2020 = 2020^n$, de unde $n = 1$. 2p

________________ Total 14p

2.

▲ Notăm k numărul copiilor şi v_1, v_2, v_3, ..., v_k vârstele lor. Atunci $v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_k = p$ şi $p \geq k$, deoarece fiecare copil are vârsta de cel puţin un an. 4p

▲ $v_1 + 3 + v_2 + 3 + v_3 + 3 + ... + v_k + 3 = p^2$. 2p

▲ $p + 3k = p^2$, astfel $3k = p(p - 1)$. 2p

▲ Astfel, p divide $3k$, p număr prim, avem p divide k sau p divide 3. .... 2p

▲ p divide k, $p \geq k$, avem $p = k$. 2p

▲ $3p = p(p - 1)$, $p = 4$, care nu este număr prim 2p

▲ p divide 3, p număr prim, obţinem $p = 3$, $k = 2$, deci vârstele copiilor sunt 1 an şi 2 ani. 2p

________________ Total 16p

Concursul interjudeţean de matematică "ŞTEFAN VELOVAN" -ediţia a XVI-a

<Subiecte - clasa a VI-a>

Partea I

1. Rezultatul calculului $0,1\cdot\left(20,23+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{99\cdot 100}\right)$ este egal cu:

a) $21,22$	**b)** $20,22$	**c)** $2,122$	**d)** $212,2$	**e)** 2022	**f)** $0,122$

2. Numărul tuturor divizorilor naturali ai numărului 123123 este egal cu:

a) 32	**b)** 16	**c)** 8	**d)** 30	**e)** 27	**f)** 36

3. Câte dintre numerele naturale mai mici decât 2023 au în scrierea lor în baza 10 şi cifra 1 şi cifra 2 şi cifra 3?

a) 57	**b)** 58	**c)** 59	**d)** 60	**e)** 61	**f)** 62

4. Numerele a, b, c şi d verifică relaţia $\frac{a}{b+c+d}=\frac{b}{a+c+d}=\frac{c}{a+b+d}=\frac{d}{a+b+c}$. Expresia
$$A=\frac{a+b}{c+d}+\frac{b+c}{a+d}+\frac{c+d}{a+b}+\frac{d+a}{b+c}$$
este egală cu:

a) 1	**b)** 2	**c)** 3	**d)** 4	**e)** 5	**f)** 6

5. În jurul unui punct O se consideră numărul maxim de unghiuri $\sphericalangle A_kOA_{k+1}$, $k\in\{1,2,3,...n-1\}$ cu proprietatea că $\sphericalangle A_kOA_{k+1}=k^\circ$, pentru orice $k\in\{1,2,3,...n-1\}$. Măsura unghiului $\sphericalangle A_1OA_n$ este egală cu:

a) 19°	**b)** 10°	**c)** 9°	**d)** 20°	**e)** 11°	**f)** 21°

6. Fie A, B, C, D patru puncte coliniare, în această ordine, astfel încât $2\cdot AC=AB+AD$ şi $BD=2^{11}$ cm. Lungimea segmentului BC este egală cu:

a) 256 cm	**b)** 512 cm	**c)** 1024 cm	**d)** 2023 cm	**e)** 2024 cm	**f)** 2048 cm

Partea a II-a

1. Fie $n\geq 2$ un număr natural. Spunem că numărul natural $\overline{a_1a_2...a_n}$ are proprietatea (P) dacă
$$\overline{a_1a_2...a_n}=n\cdot(a_1\cdot a_2+a_2\cdot a_3+a_3\cdot a_4+...+a_n\cdot a_1).$$
a) Arătaţi că numărul 186 are proprietatea (P).
b) Determinaţi toate numerele naturale $\overline{a_1a_2...a_n}$ care au proprietatea (P).

2. Se consideră triunghiul ABC în care $\sphericalangle BAC=36^\circ$. Punctul D este situat în interiorul triunghiului ABC, pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$. Dacă $\sphericalangle ABD=35^\circ$ şi $\sphericalangle ACD=37^\circ$, determinaţi măsurile unghiurilor $\sphericalangle BDC$, $\sphericalangle ABC$ şi $\sphericalangle ACB$.

(Gazeta Matematică, nr. 4/2014)

[0] **Notă:**

- Pentru Partea I se va scrie pe foaia de concurs numai varianta corectă, fără demonstraţie. Fiecare răspuns corect va primi câte 10 puncte.
- Pentru Partea a II-a se cere demonstraţia completă, pentru care se vor acorda maxim 30 puncte.
- Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timp de lucru 2 ore.

Concursul interjudeţean de matematică "ŞTEFAN VELOVAN" -ediţia a XVI-a

<Barem de evaluare şi notare - clasa a VI-a>

Oficiu ______________________________ Total 10p

Partea I

1. c)	**2. a)**	**3. e)**	**4. d)**	**5. c)**	**6. c)**

______________________________ Total 60p

Partea a II-a

1.

a)

▲ $186 = 3 \cdot (1 \cdot 8 + 8 \cdot 6 + 6 \cdot 1) \Leftrightarrow 186 = 186$. 3p

b)

▲ Dacă $n = 2$, relaţia din enunţ devine $\overline{a_1a_2} = 2a_1a_2 \Leftrightarrow a_2 = \dfrac{10a_1}{2a_1 - 1}$. Din $a_2 \in \mathbb{N}$ rezultă că $(2a_1 - 1) \mid 10a_1$ şi cum $(2a_1 - 1) \mid (10a_1 - 5)$ obţinem că $(2a_1 - 1) \mid 5$. Găsim $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, deci $\overline{a_1a_2} = 36$. 2p

▲ Dacă $n = 3$, relaţia din enunţ devine $\overline{a_1a_2a_3} = 3 \cdot (a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1)$.

▲ dacă $a_1 = 1$ rezultă că $100 + 10a_2 + a_3 = 3a_2 + 3a_2a_3 + 3a_3 \Leftrightarrow a_3 = \dfrac{7a_2 + 100}{3a_2 + 2}$.

Cum $a_3 \in \mathbb{N}$ rezultă $(3a_2 + 2) \mid (7a_2 + 100)$, de unde, folosind faptul că $(3a_2 + 2) \mid (3a_2 + 2)$, obţinem $(3a_2 + 2) \mid 286$. Deoarece $2 \leq 3a_2 + 2 \leq 29$ şi $286 = 2 \cdot 11 \cdot 13$ rezultă $3a_2 + 2 \in \{2, 11, 13, 22, 26\}$. Convine $3a_2 + 2 = 26 \Leftrightarrow a_2 = 8$, $a_3 = 6$, deci $\overline{a_1a_2a_3} = 186$. 2p

▲ dacă $a_1 = 2$ rezultă că $200 + 10a_2 + a_3 = 6a_2 + 3a_2a_3 + 6a_3 \Leftrightarrow a_3 = \dfrac{4a_2 + 200}{3a_2 + 5}$.

Cum $a_3 \in \mathbb{N}$ rezultă $(3a_2 + 5) \mid (4a_2 + 200)$, de unde, folosind faptul că $(3a_2 + 5) \mid (3a_2 + 5)$, obţinem $(3a_2 + 5) \mid 580$. Deoarece $5 \leq 3a_2 + 5 \leq 32$ şi $580 = 2^2 \cdot 5 \cdot 29$ rezultă $3a_2 + 5 \in \{5, 10, 20, 29\}$. Convine $3a_2 + 5 = 29 \Leftrightarrow a_2 = 8$, $a_3 = 8$ deci $\overline{a_1a_2a_3} = 288$. 2p

▲ dacă $a_1 = 3$ rezultă că $300 + 10a_2 + a_3 = 9a_2 + 3a_2a_3 + 9a_3 \Leftrightarrow 300 + a_2 = a_3(3a_2 + 8)$. Dacă $a_3 \leq 8 \Rightarrow a_3(3a_2 + 8) \leq 8 \cdot (3 \cdot 9 + 8) \Leftrightarrow 300 + a_2 \leq 280$, fals. Dacă $a_3 = 9 \Rightarrow 300 + a_2 = 9(3a_2 + 8) \Leftrightarrow 26a_2 = 228$, fals. 2p

▲ dacă $a_1 \geq 4$ avem: $100a_1 + 10a_2 + a_3 = 3a_1a_2 + 3a_2a_3 + 3a_3a_1 \Leftrightarrow 100a_1 = a_2(3a_1 - 10) + 3a_2a_3 + a_3(3a_1 - 1)$, fals, deoarece $a_2(3a_1 - 10) + 3a_2a_3 + a_3(3a_1 - 1) \leq 9 \cdot (3a_1 - 10) + 3a_2a_3 + 9 \cdot (3a_1 - 1) = 54a_1 + 3a_2a_3 - 99 < 100a_1$, această ultimă inegalitate fiind echivalentă cu $3a_2a_3 < 99 + 46a_1$ care e adevărată. 2p

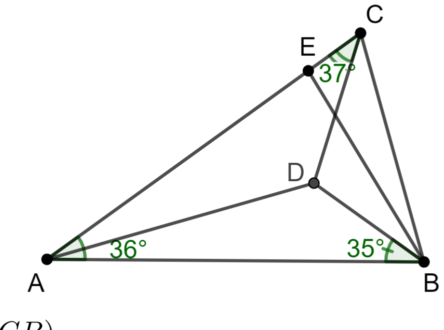
▲ Dacă $n = 4$ rezultă $\overline{a_1a_2a_3a_4} = 4 \cdot (a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1) \leq 4 \cdot (9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 + 9 \cdot 9) = 1296$, deci $a_1 = 1$, fals, deoarece $4 \cdot (a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1) \leq 4 \cdot (1 \cdot 9 + 9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 + 9 \cdot 1) = 720 < \overline{1a_2a_3a_4}$. 1p

▲ Dacă $n \geq 5$ avem $10^{n-1} \leq \overline{a_1a_2...a_n} = n \cdot (a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_na_1) \leq n \cdot \left(\underbrace{9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 + ... + 9 \cdot 9}_{n \text{ termeni}}\right) = 81 \cdot n^2$, fals, deoarece $100 > 81$ şi $10^{n-3} > n^2, \forall n \geq 5$, ceea ce implică $10^{n-1} > 81 \cdot n^2$, pentru orice $n \geq 5$. 1p

▲ Deci, numerele care au proprietatea (P) sunt 36, 186 şi 288.

______________________________ Total 15p

2.



▲ $\sphericalangle BDC = 180° - (\sphericalangle DBC + \sphericalangle DCB)$. 2p

▲ $\sphericalangle DBC + \sphericalangle DCB = 180° - (36° + 35° + 37°) = 72°$, deci $\sphericalangle BDC = 108°$. 3p

▲ Construim BE, $E \in AC$, astfel încât BD este bisectoarea unghiului ABE. Atunci ED este bisectoarea unghiului AEB. Cum $\sphericalangle AEB = 180° - \sphericalangle EAB - 2 \cdot \sphericalangle ABD = 74°$, obţinem că $\sphericalangle DEA = 37°$. 5p

▲ Din ipoteză, $\sphericalangle DCA = 37°$. Prin urmare $E = C$ şi obţinem că $\sphericalangle ABC = 70°$ şi $\sphericalangle ACB = 74°$. 5p

______________________________ Total 15p

Concursul interjudeţean de matematică "ŞTEFAN VELOVAN" -ediţia a XVI-a

<Subiecte - clasa a VII-a>

Partea I

1. Dacă a, b, c, d, e, f sunt numere reale astfel încât $ab = 2$, $bc = 3$, $cd = 4$, $de = 5$ şi $ef = 6$, atunci af este egal cu:

a) 4	**b)** 5	**c)** 6	**d)** $\frac{16}{5}$	**e)** $\frac{8}{3}$	**f)** 10

2. Câte perechi (x, y), cu $x, y \in \mathbb{Z}$, sunt soluţii ale ecuaţiei $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2023}$?

a) niciuna	**b) 7**	**c)** 17	**d)** 18	**e)** 27	**f)** 36

3. Dacă numerele reale nenule x şi y satisfac egalitatea $x^2 + y^2 = 6xy$, atunci valoarea expresiei $\left|\frac{x-y}{x+y}\right|$ este:

a) $\frac{1}{2}$	**b)** 2	**c)** $\sqrt{2}$	**d)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$	**e)** 4	**f)** $\frac{1}{4}$

4. Câte numere întregi x există, astfel încât $\sqrt{\frac{5x-2}{x-2}} \in \mathbb{N}$?

a) niciunul	**b)** 2	**c)** 3	**d)** 4	**e)** 6	**f)** 8

5. În triunghiul ABC se cunosc: $\sphericalangle A = 105^\circ$, $\sphericalangle B = 15^\circ$ şi $AC = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$. Lungimea segmentului BC este egală cu:

a) $6\,\text{cm}$	**b)** $4\sqrt{3}\,\text{cm}$	**c)** $2\left(3 + 2\sqrt{3}\right)$ cm	**d)** $\left(4 + 4\sqrt{3}\right)$ cm	**e)** $\left(6 + 2\sqrt{3}\right)$ cm	**f)** $12\,\text{cm}$

6. Se dă triunghiul ABC cu $AB = 6\,\text{cm}$, $BC = 7\,\text{cm}$, în care AD este mediană, iar M este mijlocul ei. Dacă $AC \cap BM = \{N\}$ şi $AN = 3\,\text{cm}$, atunci perimetrul triunghiului ABC este:

a) $20,5\,\text{cm}$	**b)** $16\,\text{cm}$	**c)** $17,5\,\text{cm}$	**d)** $20\,\text{cm}$	**e)** $21\,\text{cm}$	**f)** $22\,\text{cm}$

Partea a II-a

1.

a) Arătaţi că $xy + yz + zx - 2x - 2y - 2z + 3 = (x-1)(y-1) + (y-1)(z-1) + (z-1)(x-1)$.

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia:

$$xy + yz + zx = 2(x + y + z) + 8.$$

(Gazeta Matematică, nr. 7-8-9/2010)

2. Se dă triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 36^\circ$ şi $\sphericalangle C = 126^\circ$. Dacă $AB = 8\,\text{cm}$ şi $BC = 6\,\text{cm}$, calculaţi aria triunghiului ABC.

(Gazeta Matematică, nr. 2/2010)

[0]**Notă:**

- Pentru Partea I se va scrie pe foaia de concurs numai varianta corectă, fără demonstraţie. Fiecare răspuns corect va primi câte 10 puncte.
- Pentru Partea a II-a se cere demonstraţia completă, pentru care se vor acorda maxim 30 puncte.
- Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timp de lucru 2 ore.

Concursul interjudeţean de matematică "ŞTEFAN VELOVAN" -ediţia a XVI-a

<Barem de evaluare şi notare - clasa a VII-a>

Oficiu ______________________________ Total 10p

Partea I

1. d)	**2. d)**	**3. d)**	**4. c)**	**5. c)**	**6. f)**

______________________________ Total 60p

Partea a II-a

1.

a)

▲ Demonstrarea identităţii. 2p

b)

▲ Folosind punctul a), ecuaţia se scrie: $(x-1)(y-1)+(y-1)(z-1)+(z-1)(x-1)=11$. 2p

▲ Dacă $x \geq 3$, $y \geq 3$ şi $z \geq 3$, atunci $(x-1)(y-1)+(y-1)(z-1)+(z-1)(x-1) \geq 12$, deci nu avem soluţii. 2p

▲ Deci cel puţin unul dintre numerele x, y, z trebuie să aparţină mulţimii $\{0,1,2\}$ şi, datorită simetriei ecuaţiei în x, y, z, alegem $x \in \{0,1,2\}$. 1p

▲ Pentru $x=0$, $yz=2(y+z)+8$. Observăm că $z=2$ nu convine şi avem $y=\dfrac{2z+8}{z-2}$. 2p

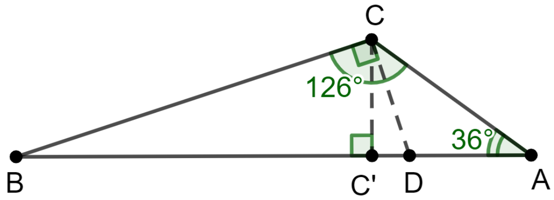
▲ Cum $y, z \in \mathbb{N}$, găsim soluţiile $(0,3,14)$, $(0,4,8)$, $(0,5,6)$, $(0,6,5)$, $(0,8,4)$, $(0,14,3)$. 2p

▲ Pentru $x=1$, $(y-1)(z-1)=11$ şi găsim soluţiile $(1,2,12)$, $(1,12,2)$. 2p

▲ Pentru $x=1$, $yz=12$ şi găsim soluţiile $(2,1,12)$, $(2,2,6)$, $(2,3,4)$, $(2,4,3)$, $(2,6,2)$, $(2,12,1)$. 2p

______________________________ Total 15p

2.



▲ Fie $CD \perp BC$, $D \in (AB)$. Atunci $\sphericalangle ACD = 126^\circ - 90^\circ = 36^\circ$. 2p

▲ Cum $\sphericalangle CAD = 36^\circ$, rezultă $\triangle ADC$ isoscel cu $AD = DC \overset{\text{not.}}{=} x$ şi $BD = 8-x$. 3p

▲ Cu teorema lui Pitagora în triunghiul BDC avem: $(8-x)^2 = x^2 + 6^2$, de unde $x = \dfrac{7}{4}$ cm. 3p

▲ Atunci $BD = \dfrac{25}{4}$ cm. 2p

▲ Dacă $CC' \perp AB$, $C' \in (AB)$, cu teorema înălţimii în triunghiul BCD avem $CC' = \dfrac{DC \cdot BC}{BD}$, ... 3p

▲ de unde $CC' = \dfrac{42}{25}$ cm. 1p

▲ În final, $\mathcal{A}(\triangle ABC) = \dfrac{168}{25}$ cm^2. .... 1p

______________________________ Total 15p

Concursul interjudeţean de matematică "ŞTEFAN VELOVAN" -ediţia a XVI-a

<Subiecte - clasa a VIII-a>

Partea I

1. Rezultatul calculului $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{97\cdot 99}+\frac{1}{98\cdot 100}$ este:

a) $\frac{1}{2023}$	**b)** $\frac{14651}{19800}$	**c)** $\frac{14649}{19800}$	**d)** $\frac{14653}{19800}$	**e)** 2023	**f)** $\frac{1}{2024}$

2. Dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 6\,\text{cm}$ şi $AD = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$ se îndoaie de-a lungul diagonalei $[AC]$ până când planele (ABC) şi (ADC) devin perpendiculare. Distanţa dintre punctele B şi D după îndoire este:

a) $5\,\text{cm}$	**b)** $6\,\text{cm}$	**c)** $\sqrt{30}\,\text{cm}$	**d)** $3\sqrt{3}\,\text{cm}$	**e)** $\frac{3}{2}\,\text{cm}$	**f)** $\sqrt{29}\,\text{cm}$

3. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $b < c$ şi $[a, 3] \setminus (b, c] = [0, 2]$. Atunci suma $a + b$ are valoarea:

a) 2	**b)** 1	**c)** 0	**d)** 3	**e)** 4	**f)** 5

4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub şi M mijlocul lui $[AB]$, P centrul feţei $ADD'A'$, iar O' centrul feţei $A'B'C'D'$. Măsura unghiului dintre dreptele PM şi $O'D$ este egală cu:

a) 30°	**b)** 45°	**c)** 60°	**d)** 90°	**e)** 120°	**f)** 135°

5. Se ştie că $x \in \mathbb{R}$ şi că $x + \frac{1}{x} = 3$. Valoarea lui $x^4 + \frac{1}{x^4}$ este:

a) 7	**b)** 49	**c)** 81	**d)** 100	**e)** 47	**f)** 10

6. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Atunci măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(A'BC)$ şi $(C'DA)$ este egală cu:

a) 30°	**b)** 120°	**c)** 60°	**d)** 135°	**e)** 45°	**f)** 90°

Partea a II-a

1. Să se demonstreze că pentru orice număr real x are loc inegalitatea: $x^8 + x^5 + 1 \geq x^4 + x$.

(Gazeta Matematică, nr. 6-7-8/2015)

2. Fie $ABCD$ un tetraedru oarecare. Notăm cu E acel punct al dreptei CD pentru care $AE + EB$ este minimă, iar cu F punctul de intersecţie al muchiei $[AB]$ cu bisectoarea unghiului AEB. Aflaţi măsura unghiului format de dreptele CD şi EF.

[0]**Notă:**

- Pentru Partea I se va scrie pe foaia de concurs numai varianta corectă, fără demonstraţie. Fiecare răspuns corect va primi câte 10 puncte.
- Pentru Partea a II-a se cere demonstraţia completă, pentru care se vor acorda maxim 30 puncte.
- Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timp de lucru 2 ore.

Concursul interjudeţean de matematică "ŞTEFAN VELOVAN" -ediţia a XVI-a

<Barem de evaluare şi notare - clasa a VIII-a>

Oficiu ________________ Total 10p

Partea I

1. b)	**2. c)**	**3. a)**	**4. d)**	**5. e)**	**6. f)**

________________ Total 60p

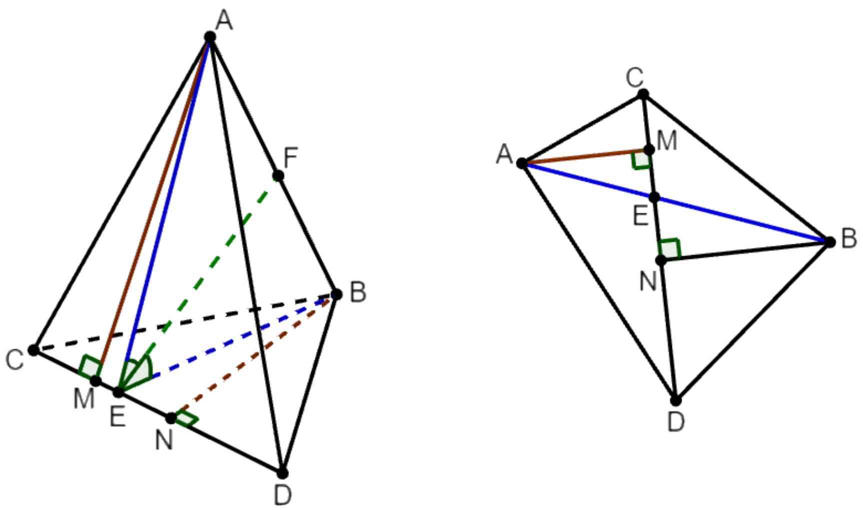
Partea a II-a

1.

▲ $x^8+x^5+1\geq x^4+x\big|\cdot 2 \Leftrightarrow 2x^8+2x^5+2\geq 2x^4+2x$ 1p
▲ $\Leftrightarrow 2x^8+2x^5+2-2x^4-2x\geq 0$ 1p
▲ $\Leftrightarrow \left(x^8+2x^5+x^2\right)+\left(x^8-2x^4+1\right)-x^2-2x+1\geq 0$ 1p
▲ $\Leftrightarrow \left(x^4+x\right)^2+\left(x^4-1\right)^2+1\geq x^2+2x.$ 1p
▲ Conform inegalităţii mediilor avem: $\left(x^4+x\right)^2+1\geq 2\left(x^4+x\right)=2x^4+2x.$ 2p
▲ Deci $\left(x^4+x\right)^2+\left(x^4-1\right)^2+1\geq 2x^4+2x+\left(x^4-1\right)^2.$ 1p
▲ Vom demonstra în continuare că $2x^4+2x+\left(x^4-1\right)^2\geq x^2+2x$ 1p
▲ $\Leftrightarrow 2x^4+\left(x^4-1\right)^2\geq x^2.$ 1p
▲ Notând $x^2=y\geq 0$, inegalitatea devine: $2y^2+\left(y^2-1\right)^2\geq y$ 1p
▲ $\Leftrightarrow y^4+1\geq y,\ \forall y\geq 0.$ 1p
▲ Dacă $y\in[0,1)$, inegalitatea este adevărată pentru că $y^4+1\geq 1>y.$ 2p
▲ Dacă $y\in[1,\infty)$, inegalitatea este adevărată pentru că $y^4+1>y^4\geq y.$ 2p

________________ Total 15p

2.



▲ Din condiţia $AE+EB$ să fie minimă, deducem (prin desfăşurarea tetraedrului în planul (BCD)) că punctele A, E, B sunt coliniare, deci unghiurile AED şi BEC sunt opuse la vârf $\Rightarrow \sphericalangle AED\equiv\sphericalangle BEC.$ 3p
▲ Fie $AM\perp CD$ şi $BN\perp CD$, cu $M,N\in CD.$ 2p
▲ $\triangle AME\sim\triangle BNE\Rightarrow \dfrac{ME}{NE}=\dfrac{AE}{EB}$ (1). 2p
▲ Deoarece EF este bisectoare în triunghiul AEB, rezultă $\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{AF}{BF}$ (2). 2p
▲ Din relaţiile (1) şi (2) avem: $\dfrac{ME}{NE}=\dfrac{AF}{BF}$ (3). 2p
▲ Deoarece proiecţia punctelor unei drepte pe o altă dreaptă păstrează raportul segmentelor, iar $AM\perp CD$, $BN\perp CD$, din relaţia (3), obţinem $EF\perp CD.$ 3p
▲ Deci $\sphericalangle(EF,CD)=90^\circ.$ 1p

________________ Total 15p