CALCULUL INTEGRALELOR -Aplicații

Prof. Drînceanu Gabriela, Prof. Vladimirescu Simona, Prof. Drînceanu Răzvan,
Colegiul Național Pedagogic„ Ștefan Velovan''

Rezumat
În această lucrare prezentăm câteva metode de integrare, pentru integralele definite, precum și câteva inegalități ce pot fi utilizate în practică, prin probleme cu rezolvări complete.

1. Fie f:$[0,2\sqrt{3}] \rightarrow R$, $f(x) = x - [x]$.
   Calculați $\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)dx$

Explicităm funcția și obținem : $f(x) = \begin{cases} x, x \in [0,1) \\ x-1, x \in [1,2) \\ x-2, x \in [2,3) \\ x-3, x \in [3,2\sqrt{3}] \end{cases}$

Obținem : $\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (x-1)dx + \int_2^3 (x-2)dx + \int_3^{2\sqrt{3}} (x-3)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_2^3 + \left(\frac{x^2}{2} - 3x\right)\Big|_3^{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} - 2 - \frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{2} - 6 - \frac{4}{2} + 4 + \frac{12}{2} - 6\sqrt{3} - \frac{9}{2} + 9 = 12 - 6\sqrt{3}$

2. Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \int_0^1 [nx]e^x dx = 1$

Știm că : $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1$ (1)

$e^x(nx-1) < [nx]e^x \leq nxe^x$ (din definiția părții intregi)(2)

Integrăm inegalitatea (2) pe intervalul [0,1] și rezultă :

$$\int_0^1 e^x(nx-1)dx < \int_0^1 [nx]e^x dx \leq \int_0^1 nxe^x \,\mathrm{dx}$$

Adică: $n + 1 - e < \int_0^1 [nx]e^x dx \leq n$

Deci: $\frac{n+1-e}{n} \leq \frac{1}{n}\int_0^1 [nx]e^x dx$, care prin trecere la limită conform criteriului "cleștelui" dă : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^1 [nx]e^x dx = 1$ (3)

Vom scrie limita inițiala astfel : $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n}\int_0^1 [nx]e^x dx = 1 \cdot 1 = 1$

3. Să se demonstreze inegalitatea :

$$\sqrt{2(\sqrt{2}-1)} < \int_0^1 \sqrt{\frac{x^4+1}{x^2+1}}dx < \frac{24+5\pi}{40}$$

Aplicăm inegalitatea mediilor și obtinem :

$$\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2+1}} = \sqrt{(x^4+1)\frac{1}{x^2+1}} < \frac{x^4+1+\frac{1}{x^2+1}}{2}\ , cu\ x \in (0,1)$$

Integrând această inegalitate obținem : $\int_0^1 \sqrt{\frac{x^4+1}{x^2+1}}dx\ < \frac{1}{2}\int_0^1 (x^4+1+\frac{1}{x^2+1})dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{5}+x+arctgx\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+1+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{24+5\pi}{40}$ (1)

Pe de altă parte , $\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2+1}} \geq \sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$

Integram și această relație pe intervalul [0,1]

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^4+1}{x^2+1}}dx\ \geq \int_0^1 \sqrt{2(\sqrt{2}-1)}dx = \sqrt{2(\sqrt{2}-1)} \qquad (2)$$

Din relația (1) și (2) , obținem că inegalitatea din enunț este adevarată

Inegalități remarcabile

a) *Inegalitatea lui Young*

Fie f : $R_+ \to R_+$, o funcție continuă , strict crescătoare, astfel încât f(0) = 0 . Atunci $\forall\ a \geq 0\ și\ b\ \in f(R_+)$ avem :

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy$$

Aplicație :

Să se arate că $\int_0^e \left(\sqrt{e^x-1}+\ln(x^2+1)\right)dx\ \geq e^2$

Se consideră f : $R_+ \to R_+$, $f(x) = \ln(x^2+1)$, care este continuă, strict crescătoare și f(0) = 0

Inversa ei este $f^{-1} : R_+ \to R_+$, $f^{-1}(x) = \sqrt{e^x-1}$

Se aplică inegalitatea lui Young pentru a = b = e și obținem :

$$e\cdot e \leq \int_0^e \ln(x^2+1)\, dx + \int_0^e \sqrt{e^x-1}dx$$

b) *Inegalitatea lui Cauchy – Buniakovski – Schwartz*

Daca f,g : [a,b] →R sunt funcții continue, atunci avem următoarea relație :

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

Avem egalitate în inegalitate dacă g = 0 și f arbitrară sau dacă f = kg, cu k din R

Aplicație :

Fie f : [a,b] →R o funcție integrabilă . Să se arate că :

$$\left(\int_a^b f(x)\sin x\, dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\cos x\, dx\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(x)dx$$

Se aplică inegalitatea pentru fiecare din integralele din membrul stâng

$$\left|\left(\int_a^b f(x)\sin x\,dx\right)^2\right| \le \left(\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\cdot\sqrt{\int_a^b sin^2xdx}\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b sin^2xdx$$

$$\left|\left(\int_a^b f(x)\cos x\,dx\right)^2\right| \le \left(\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\cdot\sqrt{\int_a^b cos^2xdx}\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b cos^2xdx$$

Adunăm cele două relații :

$$\left(\int_a^b f(x)\sin x\,dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\cos x\,dx\right)^2$$
$$\le \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b sin^2xdx + \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b cos^2xdx$$

$$\left(\int_a^b f(x)\sin x\,dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\cos x\,dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\cdot\left(\int_a^b sin^2xdx + \int_a^b cos^2xdx\right)$$
$$= \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b (sin^2x + cos^2x)dx = (b-a)\int_a^b f^2(x)dx$$

Concluzii

Lucrarea prezintă câteva metode de integrare, pentru integralele definite, precum și câteva inegalități ce pot fi utilizate în practică, prin probleme cu rezolvări complete.

BIBLIOGRAFIE

1. Marius Burtea, Georgeta Burtea, manual pentru clasa a XII-a, ed.Carminis, Pitesti, 2002
2. Mircea Ganga, Manual de analiză matematică, clasa a XII-a , volumul I, editura Mathpress, Ploiești, 2005
3. I.Petrica, E.Constantinescu, D. Petre, Probleme de analiza matematica, vol II , ed. Petrion 1997